

Question 1

圖 1 中之理想 OP-Amp 電路，若其電流增益 $i_L/i_I = 20 A/A$ ，試求解電阻元件 R 值。

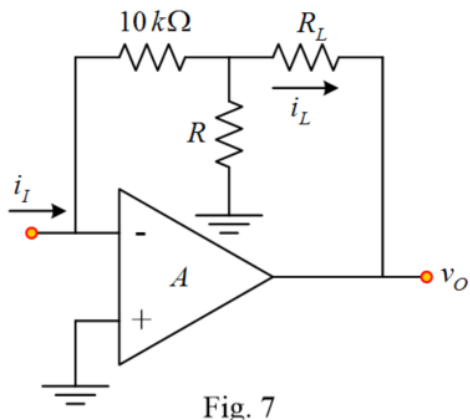


Fig. 7

Sol:

Step 1.

由於此為理想 OP-Amp 元件： $v_- = v_+ = 0$

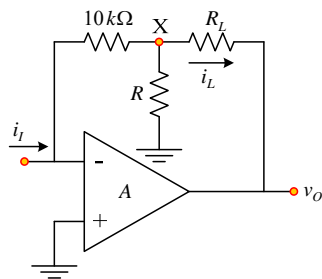
由題目已知條件 $\frac{i_L}{i_I} = 20 A/A$ 可知， $i_L = 20i_I$ 。

Step 2.

節點 X 之歐姆定律可知： $v_X = R \times (i_I - i_L)$ & $v_X = v_- - i_I \times (10 \times 10^3)$ 、

$$R \times (i_I - i_L) = v_- - i_I \times (10 \times 10^3) \Rightarrow R \times (i_I - 20i_I) = -i_I \times (10 \times 10^3)$$

$$R = \frac{10000 \times i_I}{19 \times i_I} = 526.32 \Omega$$



Question 2

圖 2 中之儀器放大電路，若 OP-Amp 為理想元件，且電阻元件 $R_1 = 0.5k\Omega$ 、 $R_2 = 0.5M\Omega$ 及 $R_3 = R_4 = 10k\Omega$ 。當共模輸入 $v_{lcm} = 5V$ 、差模輸入 $v_{ld} = 10mV$ 時，試求解電路中的物理量 i 、 v_{I1} 、 v_{I2} 、 v_{-1} 、 v_{-2} 、 v_{O1} 、 v_{O2} 和 v_O 。

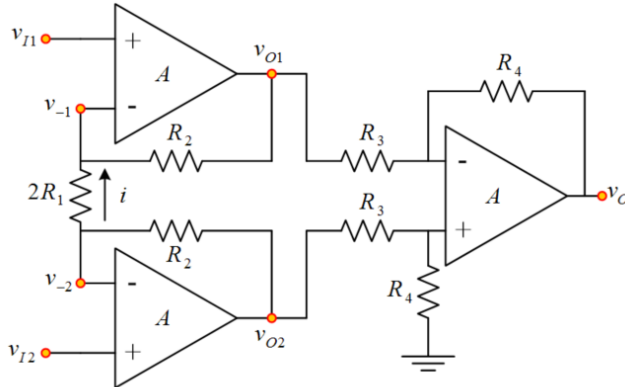


Fig. 8

Sol:

STEP1:

$$\text{共模輸入: } v_{lcm} = \frac{1}{2}(v_{I1} + v_{I2}) = 5V$$

$$\text{差模輸入: } v_{ld} = v_{I2} - v_{I1} = 10mV$$

$$\text{解聯立可得 } v_{I1} = 4.995V, v_{I2} = 5.005V$$

由理想 OP-Amp 元件 $v_- = v_+$ 、

反相輸入端與非反相輸入端無

電流流入可得知

$$v_{-1} = v_{I1} = 4.995V,$$

$$v_{-2} = v_{I2} = 5.005V$$

STEP2:

流通電阻元件 $2R_1$ 的電流

$$i = \frac{v_{-2} - v_{-1}}{2R_1} = 10\mu A$$

根據歐姆定律

$$v_{O1} = v_{-1} - iR_2 = -0.005V$$

$$v_{O2} = v_{-2} + iR_2 = 10.005V$$

STEP3:

由理想 OP-Amp 元件 $v_- = v_+$ 、

反相輸入端與非反相輸入端無

電流流入可得知

$$v_- = v_+ = v_{O2} \times \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

BY KCL

$$\frac{v_- - v_{O1}}{R_3} + \frac{v_- - v_O}{R_4} = 0$$

解題過程:

整理可得

$$v_O = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \times v_- - \frac{R_4}{R_3} \times v_{O1} = \mathbf{10.01V}$$

Question 3

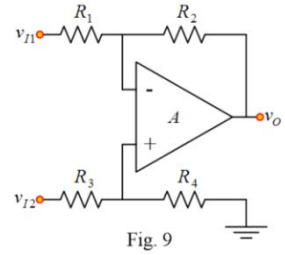
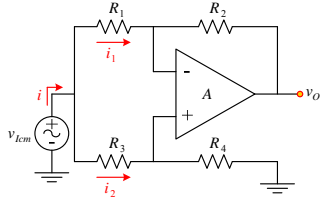
圖 3 中之理想 OP-Amp 電路，其中 $R_1 = R_2 = R_3 = R; R_4 = 3R$:

a) 試以此電路解釋何為共模輸入電路及差模輸入電路；

b) 試求解共模輸入阻抗 R_{Icm} 及差模輸入電阻 R_{Id} 。

Sol:

在共模輸入模式下，原電路圖可重繪如下：



由無電流電入非反相輸入端及歐姆定律可知， $v_- = v_+ = v_{Icm} \times \frac{R_4}{R_3 + R_4}$

由歐姆定律可知， $i_1 = \frac{v_{Icm} - v_-}{R_1}$ & $i_2 = \frac{v_{Icm} - v_+}{R_3}$

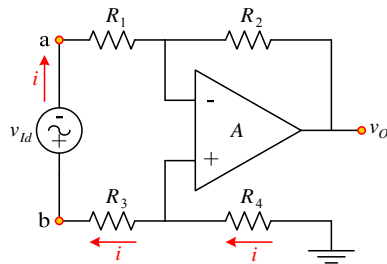
$i_1 = v_{Icm} \times \frac{R_3}{R_1(R_3 + R_4)}$ & $i_2 = v_{Icm} \times \frac{1}{R_3 + R_4}$

由 KCL 定律可知，

$i = i_1 + i_2 = v_{Icm} \times \frac{R_3}{R_1(R_3 + R_4)} + v_{Icm} \times \frac{1}{R_3 + R_4} = v_{Icm} \times \frac{R_1 + R_3}{R_1(R_3 + R_4)}$

輸入電阻 $R_{Icm} = \frac{v_{Icm}}{i} = \frac{R_1(R_3 + R_4)}{R_1 + R_3} = 2R$

在差模輸入模式下，原電路圖可重繪如下：



由無電流電入非反相輸入端及歐姆定律可知， $v_- = v_+ = 0 - iR_4 = -iR_4$

由歐姆定律可知， $v_b = v_+ - iR_3 = -i(R_3 + R_4)$ & $v_a = v_- + iR_1 = i(R_1 - R_4)$

因此可知 $v_{Id} = v_b - v_a = -i(R_1 + R_3)$

輸入電阻 $R_{Id} = \frac{|v_{Id}|}{i} = \frac{i(R_1 + R_3)}{i} = 2R$

Question 4

圖 4 中之理想 OP-Amp 電路，試求解輸入訊號 v_i 與輸出訊號 v_o 間之轉移函數，並描繪輸出訊號的時間響應圖，其中 v_i 為一方波訊號。

note: 需在輸出響應圖中標示訊號峰值及其對應的時間。

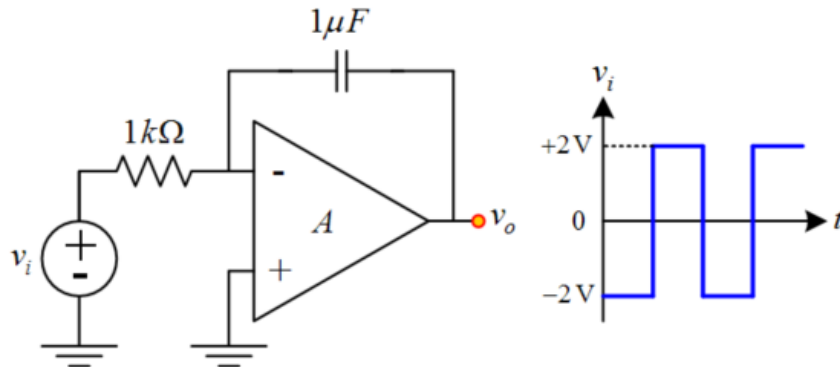


Fig. 10

Sol:

轉移函數

由 OP-Amp 反相輸入端的 KCL 定律可知

$$\frac{V_- - V_i}{R_1} + \frac{V_- - V_o}{Z_c} = 0 \quad (R_1 = 1k\Omega, C = 1\mu F)$$

$$\Rightarrow \frac{-V_i}{R_1} = \frac{V_o}{Z_c}$$

$$\Rightarrow \frac{V_o}{V_i} = -\frac{Z_c}{R_1} = -\frac{1}{j\omega R_1 C} = -\frac{1}{0.001j\omega}$$

$$\frac{V_i}{R_1} = -C \frac{dV_o}{dt} \Rightarrow V_o = -\frac{1}{R_1 C} \int V_i dt$$

所以 V_o 為一個三角波，週期與 V_i 相同， $T = 0.1ms$ 。

V_o 的波峰 (V_p) 與波谷 (V_m) 之間的差距 (ΔV) 可由充電電流及充電時間推知：

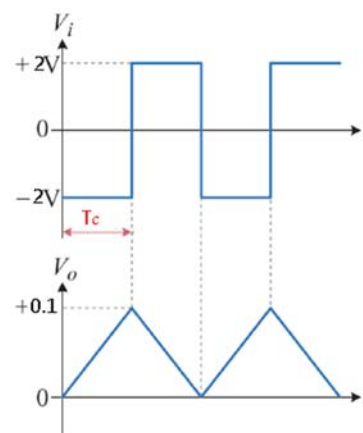
$$\text{充電電流: } I_c = \frac{V_o}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega R_1 C}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{V_i}{R_1} = 2mA \quad (\text{case: } V_i = 2V)$$

$$\text{充電時間: } T_c = \frac{T}{2} = \frac{0.1}{2} = 0.05ms = 5 \times 10^{-5}s$$

$$\therefore \Delta Q = C\Delta V = I_c T_c$$

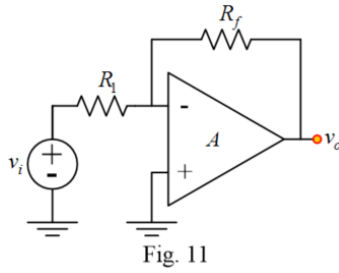
$$\Rightarrow \Delta V = \frac{I_c T_c}{C} = \frac{2 \times 10^{-3} \cdot 5 \times 10^{-5}}{1 \times 10^{-6}} = 0.1V$$

$$\Rightarrow V_p = 0.1V, V_m = 0V$$



Question 5

圖 5 中之 OP-Amp 電路，若其開迴路增益 A 為有限值，試利用方塊圖重繪下列電路，並求解 v_I 到 v_O 間的轉移函數。



Sol:

Step 1.

由 OP-Amp 工作原理可知，OP-Amp 輸出端電壓 v_O 等同於非反相輸入端與反相輸入端之電壓差 $(v_+ - v_-)$ 乘上其開迴路電壓增益 A ，即 $v_O = A \times (v_+ - v_-)$

$$\Rightarrow v_O = -A v_- \Rightarrow v_- = -\frac{v_O}{A}$$

Step 2.

由反相輸入端之 KCL 定律可知，

$$\frac{v_- - v_I}{R_1} + \frac{v_- - v_O}{R_f} = 0 \Rightarrow v_O = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right)v_- - \frac{R_f}{R_1}v_I$$

$$v_O = \left(1 + \frac{R_f}{R_1}\right) \times \left(-\frac{v_O}{A}\right) - \frac{R_f}{R_1}v_I \Rightarrow \left(1 + \frac{R_1 + R_f}{AR_1}\right)v_O = -\frac{R_f}{R_1}v_I$$

$$\Rightarrow (AR_1 + R_1 + R_f)v_O = -AR_f v_I$$

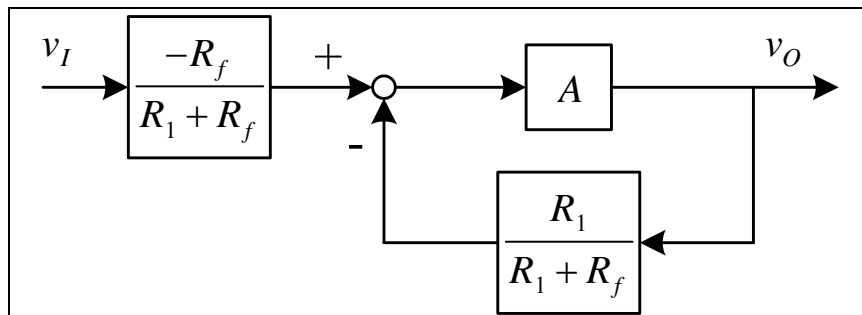
Step 3.

因此可求得 v_I 到 v_O 間的轉移函數為，

$$v_O = \frac{-AR_f}{AR_1 + R_1 + R_f} v_I \Rightarrow v_O = \frac{-\frac{AR_f}{R_1 + R_f}}{1 + \frac{AR_1}{R_1 + R_f}} v_I$$

其中，loop gain: $\frac{AR_1}{R_1 + R_f}$ 、forward loop gain: $-\frac{AR_f}{R_1 + R_f}$

OP-Amp 電路之方塊圖：

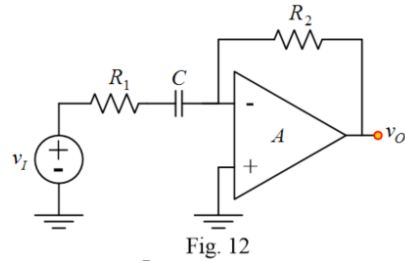


Question 6

圖 6 中之理想 OP-Amp 電路，其放大增益與操作頻率 ω 相關：

a) 試求解輸入訊號 v_I 與輸出訊號 v_O 間之轉移函數並描繪其頻率響應大小近似圖；

b) 若其高頻輸入阻抗 $Z_{I,high} = 10k\Omega$ 、高頻放大增益 40dB 及 3dB 轉折頻率 1000(rad/s)，試求解電阻元件 R_1 、 R_2 及電容元件 C 值。



Sol:

透電容元件： $Z_C(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}$

a) 由理想 OP-Amp 元件可知， $v_- = v_+ = 0$

由 OP-Amp 反相輸入端的 KCL 定律可知：
$$\frac{v_- - v_I}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{v_- - v_O}{R_2} = 0$$

$$\frac{-v_I}{j\omega R_1 C + 1} + \frac{-v_O}{R_2} \Rightarrow \boxed{\frac{v_O}{v_I} = -\frac{j\omega R_2 C}{j\omega R_1 C + 1}}$$

b)

此 OP-Amp 電路中，其輸入阻抗為 $Z_{in} = \frac{v_I}{i_I}$ ，其中 $i_I = \frac{v_I - v_-}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C}{j\omega R_1 C + 1} \times v_I$

因此輸入阻抗可表示為： $Z_{in} = R_1 + \frac{1}{j\omega C}$ ，其中高頻時 $\frac{1}{j\omega C} \rightarrow 0$

由題目已知條件「高頻輸入阻抗 $Z_{I,high} = 10k\Omega$ 」可知， $\boxed{Z_{I,high} = R_1 = 10k\Omega}$

a) 所求得之放大增益表示式可改寫為：
$$\left| \frac{v_O}{v_I} \right| = \frac{\omega R_2 C}{\sqrt{\omega^2 R_1^2 C^2 + 1}}$$

由題目已知條件「高頻放大增益 40dB」可知， $\left| \frac{v_O}{v_I} \right| = \frac{\omega R_2 C}{\sqrt{\omega^2 R_1^2 C^2 + 1}} \approx \frac{\omega R_2 C}{\omega R_1 C}$

因此 $\frac{R_2}{R_1} = 40\text{dB} = 100 \Rightarrow \boxed{R_2 = 100 \times R_1 = 1M\Omega}$

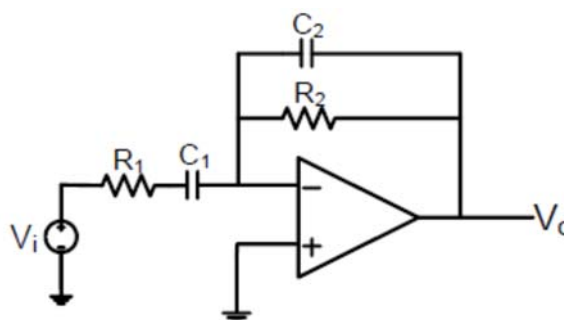
Step 3.

由題目已知條件「3dB 轉折頻率 1000Hz」可知， $\frac{1}{R_1 C} = 1000$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{1000 \times R_1} = 100\text{nF}}$$

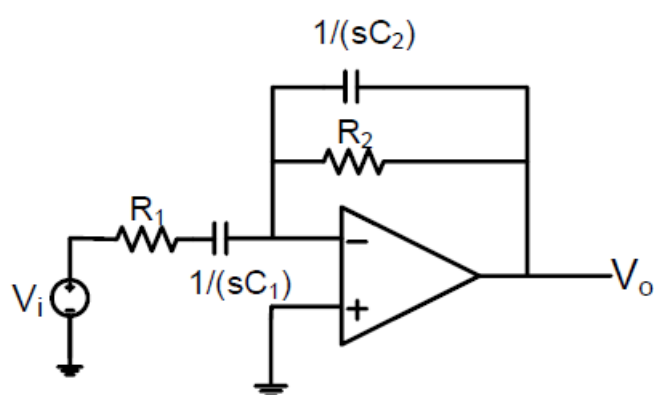
Question 7

試求下列 OP-Amp 電路之轉移函數 $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$



Sol:

先將電路轉為 s-domain



則其轉移函數如下：

$$\frac{V_o(S)}{V_i(S)} = -\frac{\left(R_2 \parallel \frac{1}{sC_2}\right)}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} = \frac{-\frac{R_2}{1 + sR_2C_2} \times sC_1}{(1 + sR_1C_1)}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_o(S)}{V_i(S)} &= \frac{-sR_2C_1}{(1 + sR_1C_1)(1 + sR_2C_2)} \\ &= \frac{-sR_2C_1}{\left[1 + \frac{s}{\left(\frac{1}{R_1C_1}\right)}\right]\left[1 + \frac{s}{\left(\frac{1}{R_1C_2}\right)}\right]} \end{aligned}$$

Question 8

試求解下列理想 OP-Amp 電路中所標示之電壓、電流物理量， v_1 、 v_o 、 i_1 、 i_2 及 i_o ，其中 $v_1 = 1V$ 。

Sol:

Step1.

理想 OP-Amp 元件：

$$V_- = V_+ = 0$$

Step2.

由歐姆定律可知：

$$i_1 = \frac{V_1 - V_-}{1 \times 10^3} = \frac{1 - 0}{1 \times 10^3} = 1mA$$

由 KCL 定律可知：

$$I_2 = i_1 = 1mA$$

由 KVL 定律可知：

$$V_o = V_- - i_2 \times 10 \times 10^3 = 0 - (1 \times 10^{-3}) \times (10 \times 10^3) = -10V$$

此結果符合課程講義內容中之 OP-Amp 反相放大增益公式：

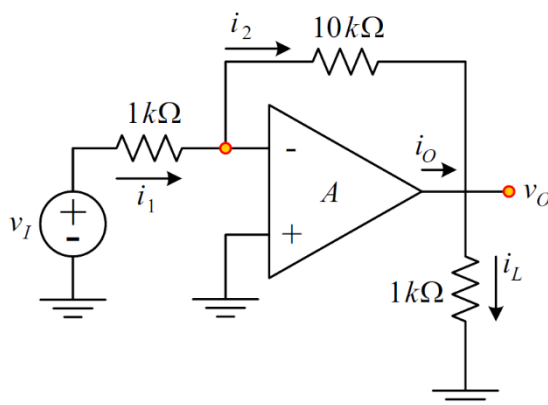
$$\frac{V_o}{V_1} = -\frac{(10 \times 10^3)}{1 \times 10^3} = -10$$

由歐姆定律可知：

$$i_L = \frac{V_o - 0}{1 \times 10^3} = -10mA$$

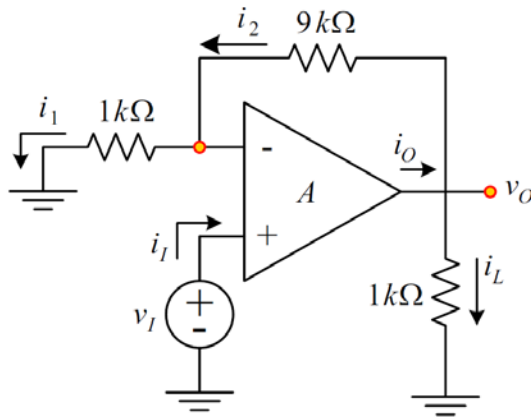
由輸出端 KCL 定律可知

$$i_o + i_2 = i_L \Rightarrow i_o = i_L - i_2 = -11mA$$



Question 9

試求解下列理想 OP-Amp 電路中所標示之電壓、電流物理量， v_o 、 i_1 、 i_2 及 i_o ，其中 $v_1 = 1V$ 。



Sol:

Step1.

理想 OP-Amp 元件：

$$V_- = V_+ = V_1 = 1V$$

且輸入端接無電流流入，因此 $i_1 = 0$

Step2.

由歐姆定律可知

$$i_1 = \frac{V_- - 0}{1 \times 10^3} = \frac{(1 - 0)}{1 \times 10^3} = 1mA$$

由於理想 OP-Amp 元件其輸入端無電流流入，

$$i_2 = i_1 = 1mA$$

由歐姆定律可知，

$$v_o = V_- + i_2 \times 9 \times 10^3 = 1 + (1 \times 10^{-3}) \times (9 \times 10^3) = 10V$$

此結果符合課程講義內容之 OP-Amp 正向放大增益公式：

$$\frac{V_o}{V_1} = -\frac{(1 \times 10^3) + (9 \times 10^3)}{1 \times 10^3} = 10$$

由歐姆定律可知，

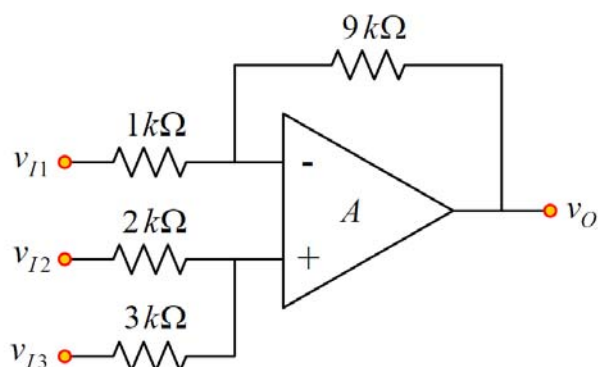
$$i_L = \frac{V_o - 0}{1 \times 10^3} = \frac{10 - 0}{1 \times 10^3} = 10mA$$

由輸出端 KCL 定律可知

$$i_o = i_2 + i_L = 11mA$$

Question 10

下列理想 OP-Amp 電路中，試以輸入電壓 v_{I1} 、 v_{I2} 和 v_{I3} 表示 OP-Amp 之輸出電壓 v_o 。



Sol:

Step1.

理想 OP-Amp 元件：

$$V_- = V_+$$

Step2.

由非反相輸入端 KCL 定律可知，

$$\begin{aligned} \frac{v_+ - v_{I2}}{2 \times 10^3} + \frac{v_+ - v_{I3}}{3 \times 10^3} &= 0 \\ \Rightarrow v_+ &= \frac{3}{5}v_{I2} + \frac{2}{5}v_{I3} = v_- \end{aligned}$$

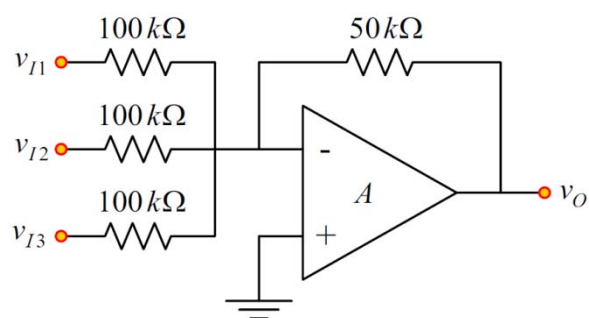
Step3.

由反向輸入端之 KCL 定律可知

$$\begin{aligned} \frac{(v_- - v_{I1})}{1 \times 10^3} + \frac{v_- - v_o}{9 \times 10^3} &= 0 \\ 10v_- - 9v_{I1} &= v_o \\ v_o &= -9v_{I1} + 10 \times \left(\frac{3}{5}v_{I2} + \frac{2}{5}v_{I3} \right) = -9v_{I1} + 6v_{I2} + 4v_{I3} \end{aligned}$$

Question 11

下列理想 OP-Amp 電路中，試以輸入電壓 v_{I1} 、 v_{I2} 和 v_{I3} 表示 OP-Amp 之輸出電壓 v_O 。



Sol:

Step1.

理想 OP-Amp 元件：

$$v_- = v_+ = 0$$

Step2.

由反向輸入端之 KCL 定律可知

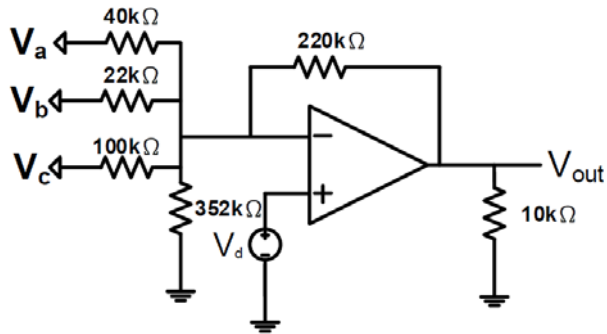
$$\begin{aligned} \frac{v_- - v_{I1}}{100 \times 10^3} + \frac{v_- - v_{I2}}{100 \times 10^3} + \frac{v_- - v_{I3}}{100 \times 10^3} + \frac{v_- - v_O}{50 \times 10^3} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{-v_{I1}}{100 \times 10^3} + \frac{-v_{I2}}{100 \times 10^3} + \frac{-v_{I3}}{100 \times 10^3} + \frac{-v_O}{50 \times 10^3} &= 0 \end{aligned}$$

整理上式以輸入電壓 v_{I1} 、 v_{I2} 和 v_{I3} 表示輸出電壓 v_O ，

$$v_O = -0.5v_{I1} - 0.5v_{I2} - 0.5v_{I3}$$

Question 12

下列理想 OP-Amp 電路中，輸入電壓 $V_a=4V$ 、 $V_b=9V$ 、 $V_c=13V$ 及 $V_d=8V$ ，試求 OP-Amp 之輸出電壓 V_o 。

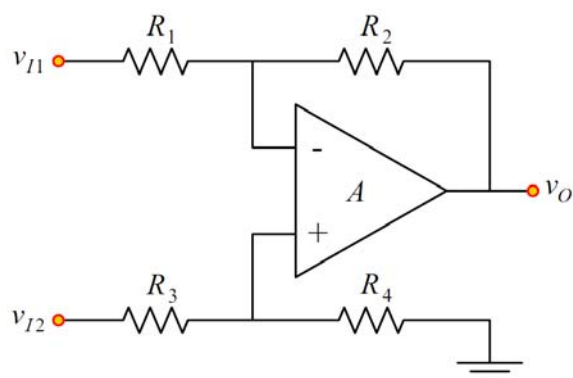


Sol:

$$\begin{aligned} V_{out} &= V_a \times \left(-\frac{220k}{40k}\right) + V_b \times \left(-\frac{220k}{22k}\right) + V_c \times \left(-\frac{220k}{100k}\right) + \\ &\quad V_d \times \left(1 + \frac{220k}{(40k||22k||100k||352k)}\right) \\ \Rightarrow V_{out} &= -22 - 90 - 28.6 - 154.6 \cong 14V \end{aligned}$$

Question 13

下列理想 OP-Amp 電路中，其中 $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$ ，試以輸入訊號 v_{I1} 、 v_{I2} 表示輸出訊號 v_O 。



Step1.

理想 OP-Amp 元件：

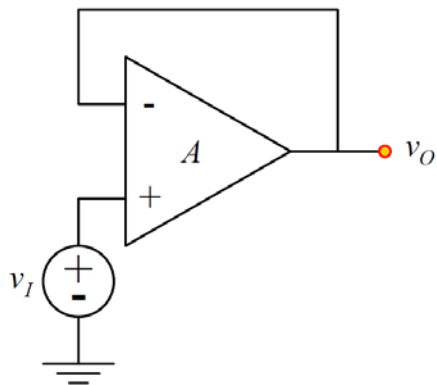
$$v_- = v_+$$
$$v_- = v_+ = v_{I2} \times \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 0.5v_{I2}$$

由 KCL 定律可知，

$$\frac{v_- - v_{I1}}{R_1} + \frac{v_- - v_O}{R_2} = 0$$
$$v_O = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \times v_- - R_2/R_1 \times v_{I1}$$
$$v_O = 2v_- - v_{I1} \Rightarrow v_O = 2 \times 0.5v_{I2} - v_{I1} = v_{I2} - v_{I1}$$

Question 14

下列理想 OP-Amp 元件所構成電壓隨耦器電路中，試求解其等效輸入阻抗 R_{in} 及輸出阻抗 R_{out} 。



Sol :

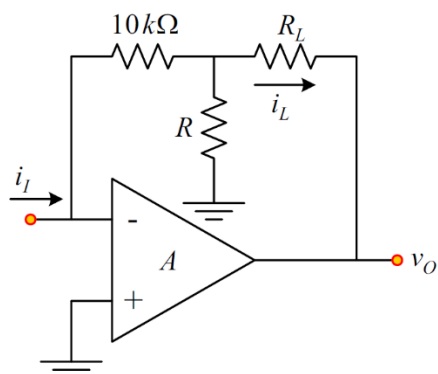
理想 OP-Amp 元件， $v_- = v_+$ 、反相輸入端及非反相輸入端無電流流入。

由於非反相輸入端無電流流入，因此 $R_{in} = \infty$

由理想 OP-Amp 元件之 $v_- = v_+$ 條件可知，輸出端電壓 $v_O = v_- = v_+ = v_I$ ，相當於輸出端連接一電壓源，因此輸出電阻 $R_O = 0$

Question 15

下列理想 OP-Amp 電路中，若其電流增益 $\frac{i_L}{i_I} = 20 \frac{A}{A}$ ，試求解電阻元件 R 值。



Sol:

Step1.

理想 OP-Amp 元件：

$$v_- = v_+ = 0$$

由題目已知條件 $\frac{i_L}{i_I} = 20 \frac{A}{A}$ 可知， $i_L = 20i_I$

Step2.

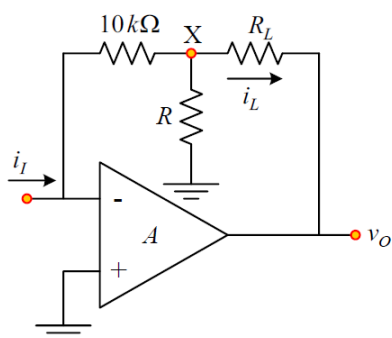
節點 X 之歐姆定律可知：

$$v_X = R \times (i_I - i_L) \quad \& \quad v_X = v_- - i_I \times (10 \times 10^3)$$

$$R \times (i_I - i_L) = v_- - i_I \times (10 \times 10^3)$$

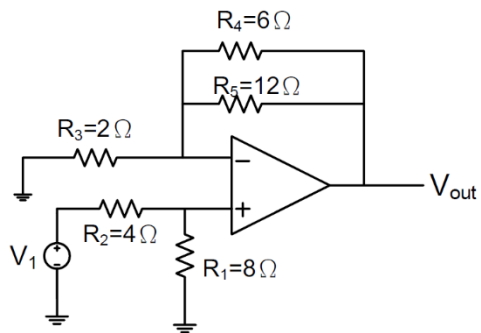
$$R(i_I - 20i_I) - i_I \times (10 \times 10^3)$$

$$R = \frac{10000 \times i_I}{19 \times i_I} = 526.32 \Omega$$



Question 16

試求解下列 OP-Amp 電路中之 V_{out} ，請以 V_1 表示。

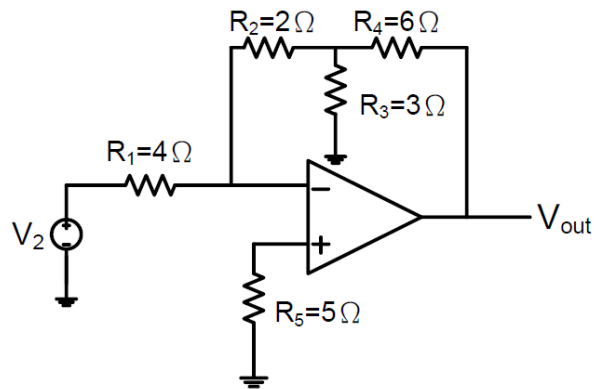


Sol:

$$\begin{aligned} V_{out} &= V_1 \times \frac{8}{8+4} \times \left(1 + \frac{6 \parallel 12}{2}\right) \\ &\Rightarrow V_{out} = V_1 \times \frac{2}{3} \times \left(1 + \frac{4}{2}\right) \\ &V_{out} = 2V_1 \end{aligned}$$

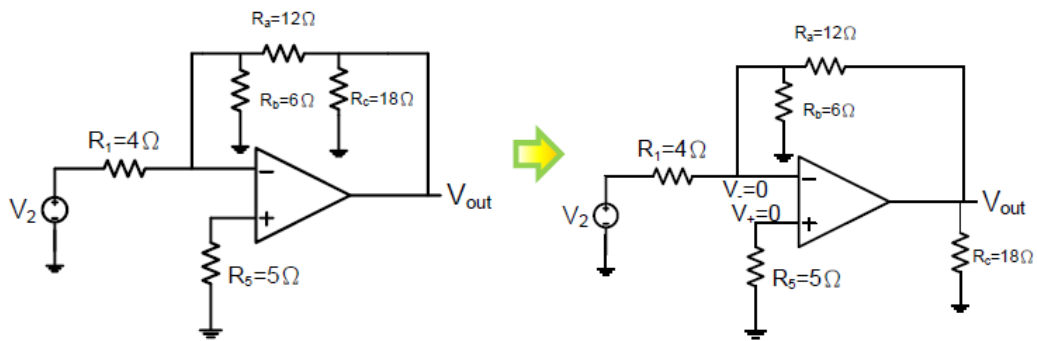
Question 17

試求解下列 OP-Amp 電路中之 V_{out} ，請以 V_2 表示。



Sol:

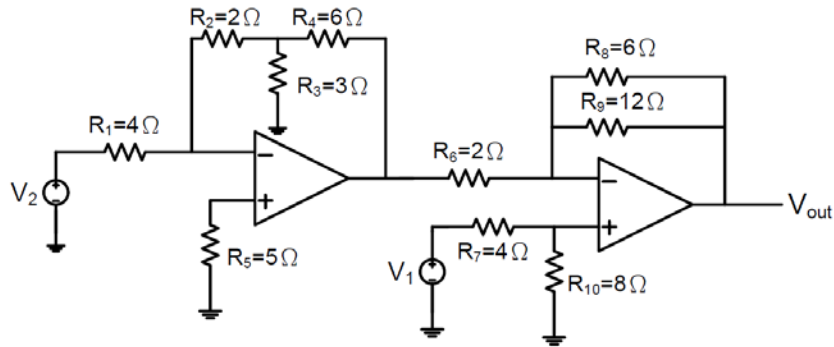
先將 R_2, R_3, R_4 由 Y 接化為 Δ 接，如下圖所示：



$$V_{out} = V_2 \times \left(-\frac{R_a}{R_1}\right) = V_2 \times \left(-\frac{12}{4}\right) = -3V_2$$

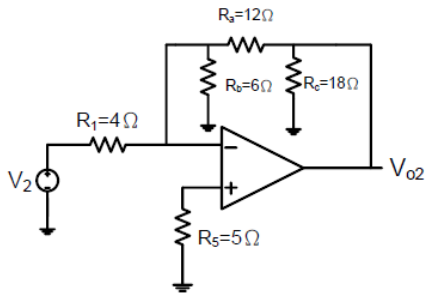
Question 18

試求解下列 OP-Amp 電路中之 V_{out} ，請以 V_1 及 V_2 表示。



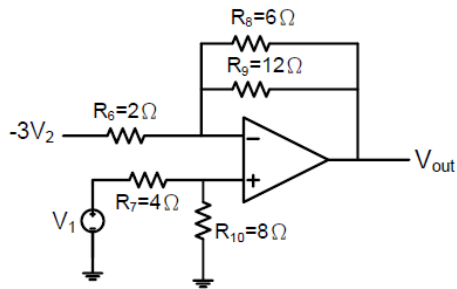
Sol:

首先求出 V_{O2} ，如下圖所示：



$$V_{O2} = V_2 \times \left(-\frac{R_a}{R_1}\right) = V_2 \times \left(-\frac{12}{4}\right) = -3V_2$$

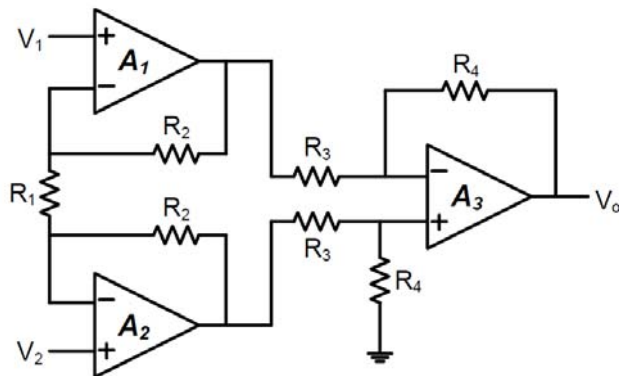
接著求出 V_{out} ，如下圖所示：



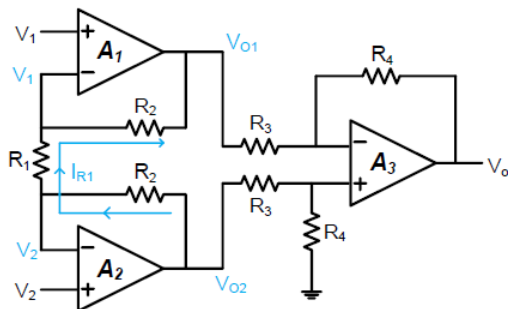
$$\begin{aligned} V_{out} &= -3V_2 \times \left(\frac{6 \parallel 12}{2}\right) + V_1 \times \frac{8}{8+4} \times \left(1 + \frac{6 \parallel 12}{2}\right) \\ \Rightarrow V_{out} &= -3V_2 \times (-1) + V_1 \times \frac{8}{12} \times \left(1 + \frac{4}{2}\right) \\ \Rightarrow V_{out} &= 6V_2 + 2V_1 \end{aligned}$$

Question 19

下列理想 OP-Amp 電路， $R_1=10k\Omega$ 、 $R_2=50k\Omega$ 、 $R_3=20k\Omega$ 及 $R_4=30k\Omega$ ，且 $V_2>V_1$ ，試求解 V_o ，請以 V_1 及 V_2 表示。



Sol:



$$I_{R1} = (V_2 - V_1)/R_1$$

$$V_{O1} = V_1 - I_{R1} \times R_2 = V_1 - (V_2 - V_1) \frac{R_2}{R_1} = 6V_1 - 5V_2$$

$$V_{O2} = V_2 - I_{R2} \times R_2 = V_2 - (V_2 - V_1) \frac{R_2}{R_1} = 6V_2 - 5V_1$$

$$\Rightarrow V_o = (V_{O2} - V_{O1}) \times \frac{R_4}{R_3} = \frac{33}{2} (V_2 - V_1)$$

