1. 考慮系統轉移函數如下:

$$\mathrm{G}(s)=\frac{4s^2+25s+38}{s^3+9s^2+26s+24}$$

若系統之狀態空間表示式為:

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix}X+gu \qquad ,\ x(0)=0\text{,試求}\ a\ ,\ b\ ,\ \mathrm{g}$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}X$$

ANS:

由於分解後的 A 矩陣為對角矩陣，故本題希望採用並聯分解法。將 $G(s)$ 因式分解為:

$$\mathrm{G}(s)=\frac{4s^2+25s+38}{s^3+9s^2+26s+24}=\frac{2}{s+2}+\frac{1}{s+3}+\frac{1}{s+4}$$

根據題意，第一個狀態必須選擇其對應的特徵值-2，因此遵循並聯分解的步驟，可得下列兩種可能的答案:

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}u\ ,\ y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}X$$

或

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}u\ ,\ y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}X$$

因此 $a = -3, b = -4, g = \begin{bmatrix} 2 \\ \\ 1 \end{bmatrix}$，或 $a = -4,\ b = -3,\ g = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. 考慮系統轉移函數如下:

$$\mathrm{G}(s) = \frac{s-1}{s\left(s^2+3s+2\right)}$$

請表示成狀態空間可控制典型式(Controllable Canonical Form).

Ans:

$$\mathrm{G}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s-1}{s\left(s^2+3s+2\right)} = \frac{s-1}{s^3+3s^2+2s} \times \frac{X(s)}{X(s)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y(s) = (s-1)\,X(s) \\ U(s) = \left(s^3+3s^2+2s\right)X(s) \end{cases}$$

$$\overset{L^{-1}}{\Rightarrow} \begin{cases} y(t) = \dot{x} - x \\ u(t) = x^{(3)} + 3\ddot{x} + 2\dot{x} \end{cases}$$

$$Let\ x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \ddot{x}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_3 - 2x_2 + u(t) \\ y = x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

3. 考慮一系統:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\equiv Ax+Bu, x(0)=x_0$$

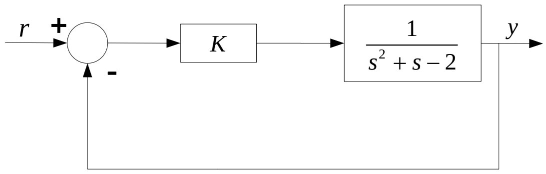
試求:狀態轉移矩陣$\Phi(t)$

ANS:

狀態轉移矩陣:

$$\begin{aligned}\Phi(t)&=\mathrm{L}^{-1}[(\mathrm{sI}-\mathrm{A})^{-1}]\\
&=\mathrm{L}^{-1}\left[\begin{pmatrix}s & -1\\ 6 & s+5\end{pmatrix}^{-1}\right]\\
&=\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{pmatrix}s+5 & 1\\ -6 & s\end{pmatrix}\right]\\
&=\mathrm{L}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{1}{(s+2)(s+3)}\\ \frac{-6}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}\\
&=\mathrm{L}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{3}{s+2}-\frac{2}{s+3} & \frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}\\ \frac{-6}{s+2}+\frac{6}{s+3} & \frac{-2}{s+2}+\frac{3}{s+3}\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & e^{-2t}-e^{-3t}\\ -6e^{-2t}+6e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

4. 考慮控制系統如下



若定義 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$，系統狀態空間表示式可表示為:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + Br$$

$$y = C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

，試求:

(a) 狀態空間可控制典型式(Controllable Canonical Form)下的 A , B , C

(b) A 矩陣之特徵值

(c) 由(b)之結果，試求 K 之範圍保證系統穩定

(d) 使用羅斯表方法驗證(c)的結果

ANS:

因為 $\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{K}{s^2 + s - 2 + K}$ ，所以其微分方成式為:

$$\ddot{y} + \dot{y} + (K-2)y = Kr$$

令狀態變數為 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ ，則

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (2-\mathrm{K})\,\mathrm{x}_1 - 2x_2 + Kr \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2-K & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} r \text{ , } y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

因此 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2-K & -1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(sI-A)=\det\begin{bmatrix} s & -1 \\ K-2 & s+1 \end{bmatrix}=s^2+s+(\mathrm{K}-2)=0$$

因此特徵值為 $s=\dfrac{-1\pm\sqrt{9-4K}}{2}$

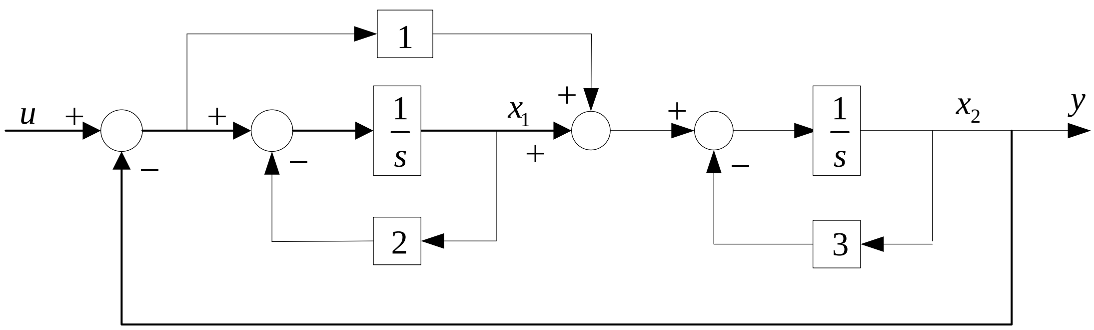
若閉迴路系統穩定，則特徵值必須在左半平面，因此:

$$\frac{-1\pm\sqrt{9-4K}}{2}<0\Rightarrow K>2$$

閉迴路系統特徵方程式 $s^2+s+(\mathrm{K}-2)=0$，根據羅斯表:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & K-2 \\ s^1 & 1 & \\ s^0 & K-2 & \end{array} \Rightarrow K>2 \text{ 即為穩定}$$

5. 考慮閉迴路系統如下圖:



使用輸入u,輸出y,與狀態$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ 寫出系統狀態空間表示式並解釋u至y之轉移函數系統是否可觀?

Ans:

根據上圖狀態的定義可得:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \frac{1}{s}(\mathrm{u}-\mathrm{y}-2\,\mathrm{x}_1) \\
&\mathrm{x}_2 = \frac{1}{s}(\mathrm{x}_1+\mathrm{u}-\mathrm{y}-3\,\mathrm{x}_2) \\
&\mathrm{y} = \mathrm{x}_2
\end{aligned}
$$

整理之後為:

$$
\begin{cases} sx_1 = u - y - 2x_1 \\ sx_2 = x_1 + u - y - 3x_2 \\ y = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 + u \\ y = x_2 \end{cases}
$$

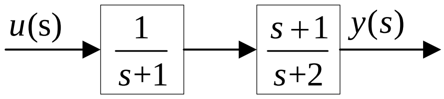
$$
\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}, x(0) = 0
$$

帶入公式$C(sI-A)^{-1}B$ 可求得轉移函數為:

$$
\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+3}{s^2+6s+9}
$$

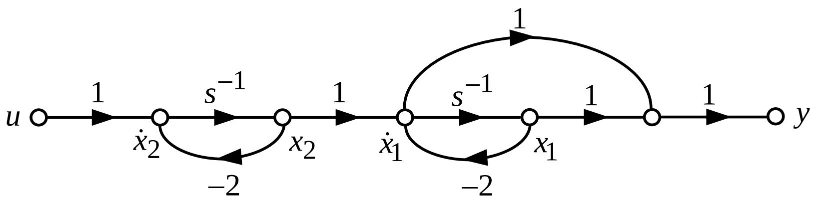
可觀性矩陣$Q_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ ，$rank(Q_O) = 2$= 階數，可知系統是可觀察的。

6. 考慮下圖，以二階狀態空間描述之系統是否為可控?是否為可觀?



Ans:

利用串聯分解法分解系統:



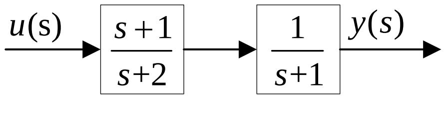
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \text{ , } y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

可控性矩陣: $Q_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

可觀性矩陣: $Q_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

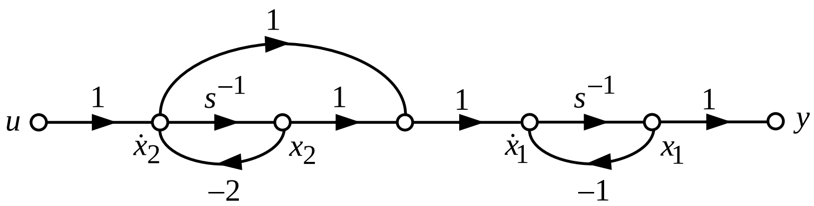
$\because \det(Q_C) \neq 0$, $\det(Q_O) = 0$ ，所以系統可控制但不可觀察

7. 考慮下圖，以二階狀態空間描述之系統是否為可控?是否為可觀?



Ans:

利用串聯分解法分解系統:



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \ , \ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

可控性矩陣: $Q_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

可觀性矩陣: $Q_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$\because \det(Q_C) = 0$，$\det(Q_O) \neq 0$，所以系統不可控制但可觀察