1.　考慮一特徵方程式 $1+\frac{K}{s(s+5)(s+40)}=0$ ，確認 $s=-5+5j$ 是否會落在跟軌跡上，如果是，請問 K 值為何?

Sol:

(方法一)

令 $G(s)=\frac{1}{s(s+5)(s+40)}$

若 $s=-5+5j$ 是根軌跡上的一點，則代入 $G(s)=-\frac{1}{K}$ 後 K 必須有實數解。

$$\frac{1}{(-5+5j)(-5+5j+5)(-5+5j+40)}=\frac{1}{-125(6+8j)}=-\frac{1}{K}$$

很明顯地，上述方程式中的 K 值無實數解(系統增益變數必為實數)，因此 $s=-5+5j$ 不落在此系統的跟軌跡上。

(方法二)

另外，亦可從相位關係來求證是否落在此系統的根軌跡上。

$$-\angle(-5+5j)-\angle(-5+5j+5)-\angle(-5+5j+40)$$

$$=--(90^\circ+\tan^{-1}\frac{5}{5})-90^\circ-\tan^{-1}\frac{5}{35}$$

$$=-233.13^\circ$$

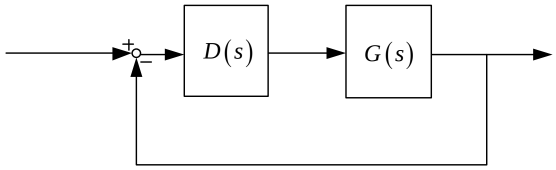
很明顯地， $s=-5+5j$ 帶入開路轉移函數後所得的相位值不等於奇數倍 180° 或偶數倍 180° ，所以相位關係不滿足，因此 $s=-5+5j$ 不落在系統的跟軌跡上。

注意：若某一點 s_1 位於此系統的根軌跡上，則根據根軌跡原理，將 s_1 代入大小關係可解得 K 值。該值即為 s_1 所對應的系統增益 K 值。

2.　一系統如下圖所示，其中 $D(s)=K(s+2)/(s+p)$ ， $G(s)=1/s(s+1)$ 。

(1)請用根軌跡設計方法找出 K 和 p 讓根軌跡通過點 $-3\pm j3$ 。

(2)請從(1)中的根軌跡找出第三個根。



Sol:

(1)利用相位關係

$$\angle\frac{s+2}{s+p}\times\frac{1}{s(s+1)}\bigg|_{s=-3+j3}=\angle\frac{-1+j3}{[(p-3)+j3](-3+j3)(-2+j3)}-\angle(-5+5j+40)$$

$$=\left(180^\circ-\tan^{-1}\frac{3}{1}\right)-\tan^{-1}\frac{3}{p-3}-\left(180^\circ-\tan^{-1}\frac{3}{3}\right)-\left(180^\circ-\tan^{-1}\frac{3}{2}\right)$$

$$=-180^\circ$$

$$\Rightarrow p=8.25$$

再利用大小關係

$$\left|\frac{-1+j3}{(5.25+j3)(-3+j3)(-2+j3)}\right|=\frac{1}{k}\ \Rightarrow\ k=29.25$$

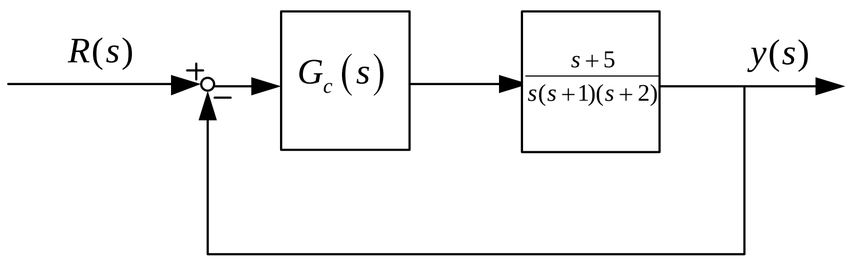
(2)特徵方程式

$$\Delta(s)=s^3+9.25s^2+37.5s+58.5=(s^2+6s+18)(s+a)$$

比較係數，得 $a=3.25$

第三個極點 $s=-3.25$

3.　給定一控制系統



(1)如果補償器為 $G_c(s)=K$ ，請畫出此控制系統之根軌跡與漸進線。請標明與虛軸的交點及其對應之 K 值。

(2)如果補償器為 $G_c(s)=K\dfrac{s+2}{s+p}$ ，請找出 p 值讓點 $A=(-1,j4)$ 為根軌跡。

Sol:

(1)令 $G(s)=\dfrac{s+5}{s(s+1)(s+2)}$ ，

(a) $G(s)$極點： $s=0,-1,-1,\ n=3$

$G(s)$零點： $s=-5,\ \mathrm{m}=1$

(b)實軸上的根軌跡：[-5,-2],[-1,0]

(c)漸進線與實軸的交點：$\sigma_A = \dfrac{(-3)-(-5)}{2} = 1$

漸進線角度：$\theta_A = \dfrac{\pm(2q+1)180^\circ}{2} = \pm 90^\circ$

(d)分離點滿足 $\dfrac{dG(s)}{ds} = 0$,解得 $s^3 + 9s^2 + 15s + 5 = 0$

$\Rightarrow s = -6.49, -1.6, -0.45$

假設只劃 $K > 0$ 的根軌跡

(e) 根軌跡與虛軸交點:閉迴路特性方程式為:

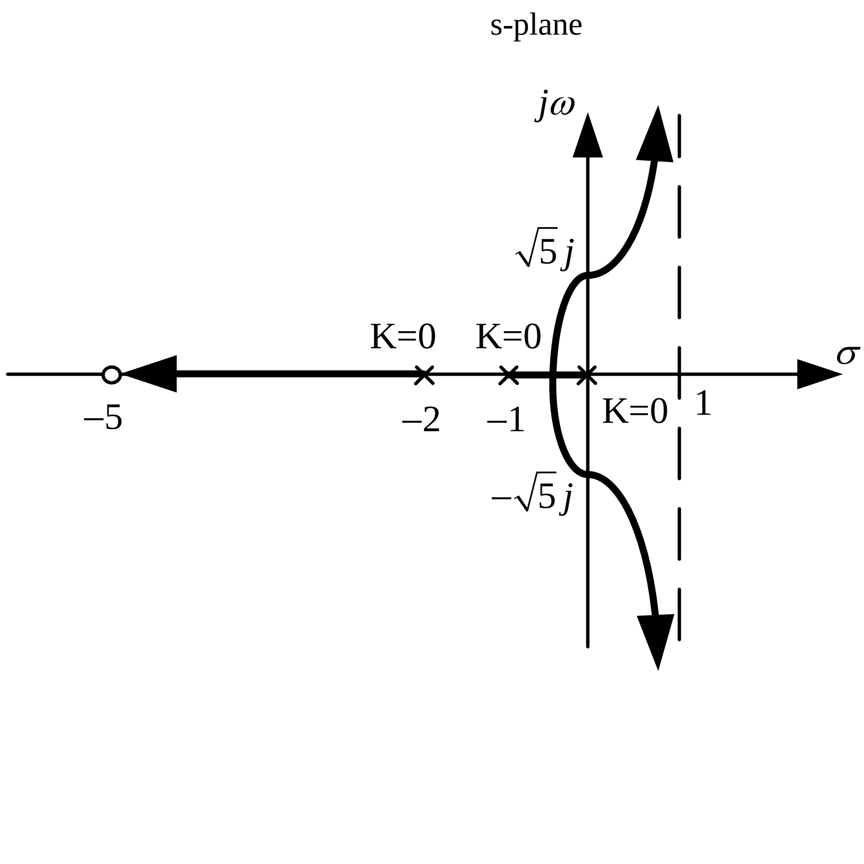
$s^3 + 3s^2 + (2+K)s + 5K = 0$

羅斯表:

s^3	1	2+K
s^2	3	5K
s	$\dfrac{6-2K}{3}$	
s^0	5K	

當 K=3 時，羅斯表 s 列全部為零，利用 s^2 列輔助方程式 $A(s) = 3s^2 + 15 = 0$，解得 $s = \pm j\sqrt{5}$。此即為根軌跡與虛軸的交點，而該交點的 $K = 3$。

(f) 根軌跡圖:



若$G_c(s)=K\dfrac{s+2}{s+p}$，則開路轉移函數為$G_c(s)G(s)=\dfrac{K(s+5)}{s(s+1)(s+p)}$。

若要求$A=(-1,j4)$落在根軌跡上，則下列相位關係必須滿足:

$$\begin{aligned}\angle G_cG(-1+j4)&=\angle\frac{4+j4}{(-1+j4)(j4)(-1+p+j4)}\\&=45^\circ-104^\circ-90^\circ-\tan^{-1}\frac{4}{p-1}\\&=-180^\circ\end{aligned}$$

所以解得 p=7.66

4. 請找出特徵方程式$1+KG(s)=0$**的根軌跡，其中**$G(s)=\dfrac{1}{s(s+2)}$**。**

Ans:

(a) $G(s)$極點：$s=0,-2$

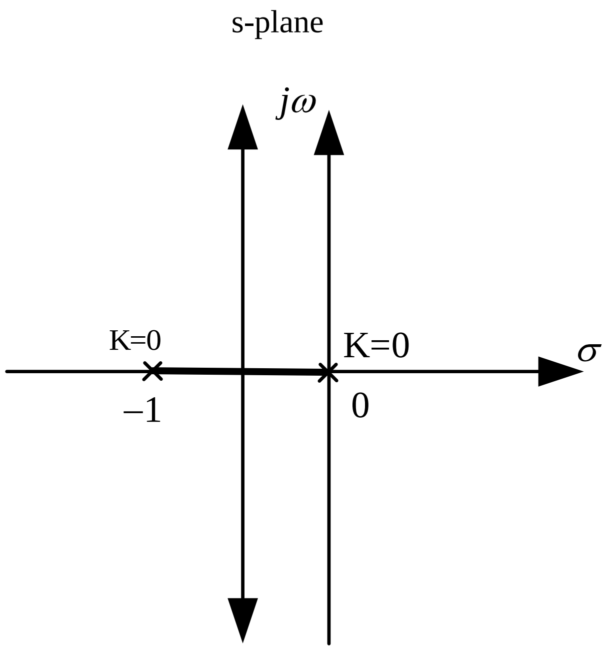
(b)實軸上的根軌跡：[0,-2]

(c)漸進線與實軸的交點：$\sigma_A=\dfrac{(0)-(-2)}{2}=1$

漸進線角度：$\theta_A=\dfrac{\pm(2q+1)180^\circ}{2}=\pm 90^\circ$

(d)分離點滿足$\dfrac{dG(s)}{ds}=0$,解得$s=1$

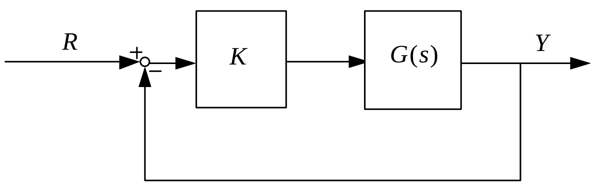
(e) 根軌跡圖:



5. **考慮一單位迴授系統，其中控制器增益 K 與受控系統** $G(s)=\dfrac{s+1}{s^2(s+9)}$ **。當** $G(s)$ **的相位於** $180°$ **時根軌跡的分離點(重合點)為** $s=-3$ **。其中特徵方程式為** $s^3+9s^2+ks+k=0$ **。**

(1) 請找出在分離點 $s=-3$ **之 K 值(** K_0 **)與該點之多重根。**

(2) 令 $K=K_0+K_1$ **，求根軌跡為** K_1 **，找到分離點之離開角與到達角。**



Ans:

(1)

(a) 利用大小關係

$$\left|\frac{s+1}{s^2(s+9)}\right|_{s=-3}=\frac{1}{K_0}\quad\Rightarrow\quad K_0=27$$

分離點滿足 $\dfrac{d}{ds}G(s)=0$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s+1}{s^2(s+9)}\right)=0$$

得 $s=-3,-3,-3$

(2)

令 $K_0=27$，則 $K=27+K_1$ 帶入 $\Delta(s)$

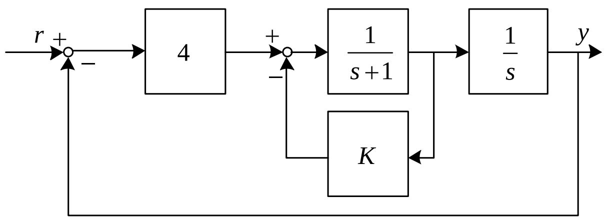
$$\Rightarrow \Delta(s)=s^3+9s^2+(27+K_1)s+(27+K_1)$$
$$=1+K_1\frac{s+1}{(s+3)^3}\overset{\Delta}{=}1+K_1G_1(s)=0$$

利用 $G_1(s)$ 討論分離點的離開角，將 $s=-3,-3,-3$ 視為極點，則

$$\phi_2=-2\left(180^\circ\right)=-360^\circ\Rightarrow 3\phi_p=\pm(2g+1)\pi+360^\circ$$

得 $\phi_z=\pm60^\circ,180^\circ$

6. 請找出 $K>0$ 閉迴路系統之根軌跡。



Ans:

系統開路轉移函數為

$$G(s)=4\times\frac{\frac{1}{s+1}}{1+\frac{K}{s+1}}\times\frac{1}{s}=\frac{4}{s(s+1+K)}$$

而閉迴路轉移函數為:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{4}{s^2+s+Ks+4}$$

其中特性方程式為 $s^2+s+Ks+4=0$。將特性方程式表示為 $1+\dfrac{Ks}{s^2+s+4}=0$，並

定義$G^*(s)=\dfrac{Ks}{s^2+s+4}$，則可利用根軌跡的原理，針對$G^*(s)$求 K 的改變所形成的閉迴路根軌跡，注意，此時的$G^*(s)$雖不是原系統結構下的開路轉移函數，但其對應的閉迴路特性方程式與原系統的閉迴路特性方程式相同，所以根軌跡是完全一樣的。

(a) $G^*(s)$極點： $s=-0.5\pm j1.936$, $n=2$

$G^*(s)$零點： $s=0,\ \mathrm{m}=1$

(b)實軸上的根軌跡：[-∞,0]

(c)漸進線角度： $\theta_A=\dfrac{\pm(2q+1)180^\circ}{2}=180^\circ$

(d)極點 $-0.5\pm j1.936$ 的離開角:

$\phi_p=\pm(2q+1)+\phi_1$

$\phi_1=-90^\circ+\left(180^\circ-\tan^{-1}3.873\right)=14.5^\circ$

所以取$\phi_p=165.5^\circ$

(e)

分離點滿足$\dfrac{dG^*(s)}{ds}=0$，解得$s^2-4=0, s=\pm 2$，因為只考慮 K>0 的根軌跡，所以取分離點為 s=-2

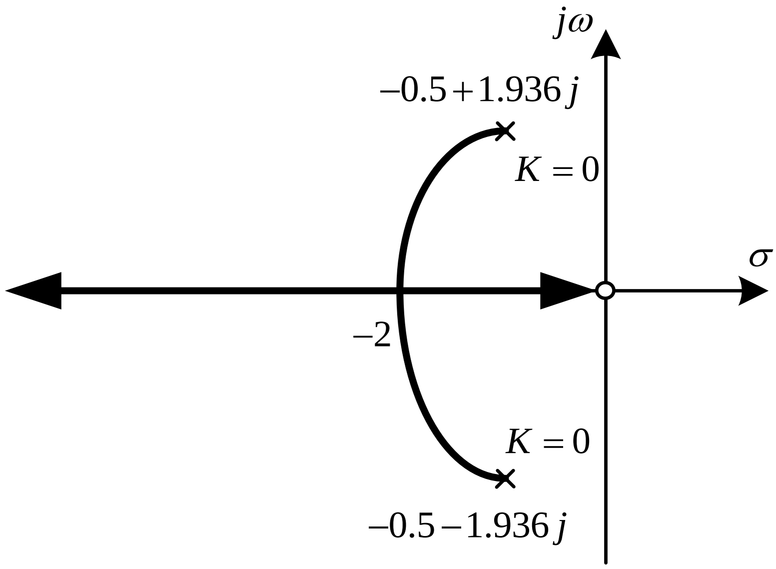
(f)

根軌跡與虛軸交點: 閉迴路特性方程式$s^2+s+Ks+4=0$羅斯表測試:

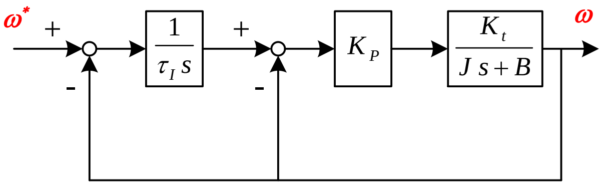
s^2	1	4
s	$1+K$	
s^0	4	

若系統要穩定，則 K>-1

(g) 根軌跡圖:



7. **一伺服馬達採用 IP 控制器架構，其速度迴路控制系統如下圖所示。試以 K_p 為變數畫根軌跡圖形，其中** $J=0.1\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ 、 $B=0.4\,\mathrm{N\cdot m\cdot sec}$ 、 $K_t=0.5\,\mathrm{N\cdot m}/Amp$ **及** $\tau_I=0.1$ 。



Sol:

$$T(s)=\frac{\dfrac{K_pK_t}{\tau_i s(Js+B)}}{1+\dfrac{K_pK_t}{Js+B}+\dfrac{K_pK_t}{\tau_i s(Js+B)}}$$

$$=\frac{K_pK_t}{\tau_i s(Js+B)+\tau_i sK_pK_t+K_pK_t}$$

$$=\frac{K_pK_t}{\tau_i Js^2+\tau_i\left(B+K_pK_t\right)s+K_pK_t}$$

$$\Rightarrow s^2+\frac{B}{J}s+\frac{K_pK_t}{J}s+\frac{K_pK_t}{\tau_i J}=0$$

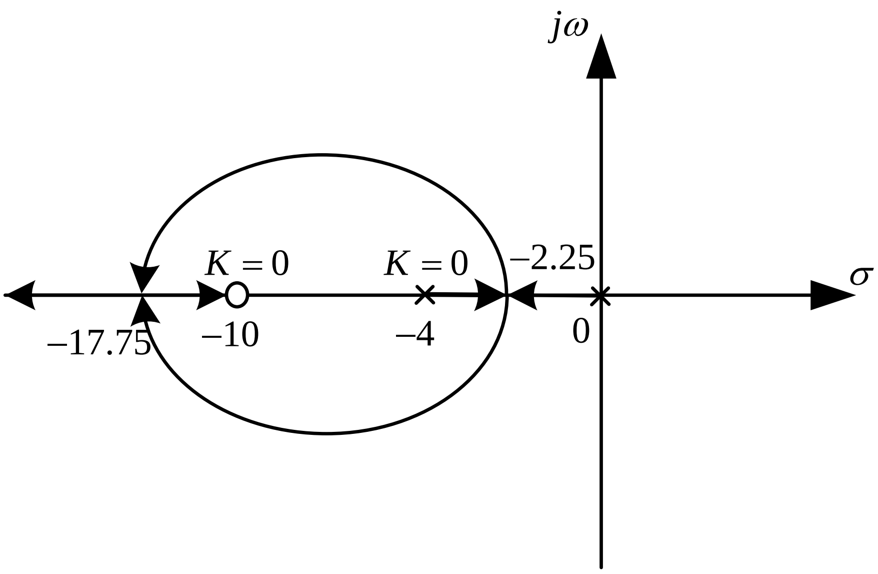
$$\Rightarrow 1+\frac{\dfrac{K_pK_t}{J}s+\dfrac{K_pK_t}{\tau_i J}}{s^2+\dfrac{B}{J}s}=0$$

$$\Rightarrow 1+K_p\frac{\tau_i K_t s+K_t}{\tau_i Js^2+\tau_i Bs}=0$$

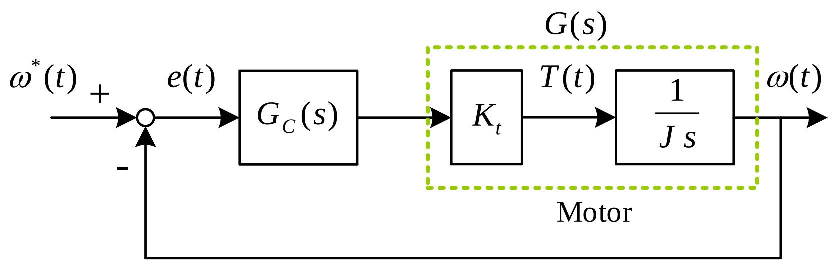
$$L(s)=\frac{\tau_i K_t s+K_t}{\tau_i Js^2+\tau_i Bs}=\frac{5(s+10)}{\left(s^2+4s\right)}$$

分離點: $\dfrac{dL(s)}{ds}=0\Rightarrow s^2+20s+40=0\Rightarrow s=-2.25,-17.75$

s-plane



8.　考慮馬達控制方塊圖如下，其中 $J=1$，$K_t=0.5$，$G_C(s)=K_p+\frac{K_i}{s}$，且 $K_p=4$。



請畫出系統隨著 K_i 變化時的根軌跡。

Ans:

系統特徵方程式: $1+G_c(s)G(s)=1+\frac{K_t}{Js}\left(K_p+\frac{K_i}{s}\right)=0$

$$1+\frac{K_t}{Js}\left(K_p+\frac{K_i}{s}\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad 1+\left(\frac{K_tK_p}{Js}+\frac{K_tK_i}{Js^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow\quad Js^2+K_tK_ps+K_tK_i=0$$

$$\Rightarrow\quad 1+K_i\frac{K_t}{Js^2+K_tK_ps}=0\ \ \Rightarrow\ 1+K_iL(s)=0$$

$$\Rightarrow L(s)=\frac{K_t}{Js^2+K_tK_ps}=\frac{0.5}{s^2+2s}$$

Root-locus:

(a) $G(s)$ 極點：$s=0,-2$

(b)實軸上的根軌跡：[0,-2]

(c)漸進線與實軸的交點：$\sigma_A=\frac{(-2)-(0)}{2}=-1$

漸進線角度：$\theta_A=\frac{\pm(2q+1)180^\circ}{2}=\pm 90^\circ$

(d)分離點滿足 $\frac{dG(s)}{ds}=0$,解得 $s=-1$

(e) 根軌跡圖: