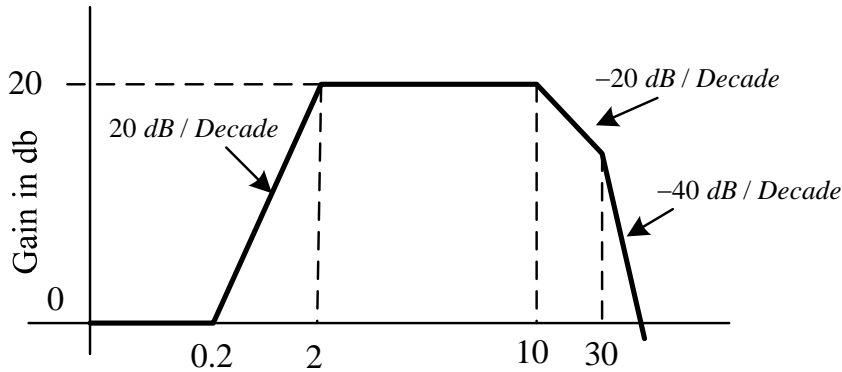


1. 假設有一系統為極小相位，其波德大小如下圖所示，請求出該系統之轉移函數。



Ans:

因轉角頻率為 0.2, 2, 10, 30 rad/sec，且低頻漸進線為水平線，所以系統轉移函數為

$$G(s) = \frac{\left(1 + \frac{s}{0.2}\right)}{\left(1 + \frac{s}{2}\right)\left(1 + \frac{s}{10}\right)\left(1 + \frac{s}{30}\right)}$$

2. 考慮一開路系統  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$ ，當輸入為  $u(t) = 2 \sin \pi t$  時，請問系統穩態響應為何？

Ans: 系統的頻率轉移函數為  $G(j\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 + 2j\omega}$ 。

頻率轉移函數在頻率  $\omega = \pi$  為:

$$G(j\omega) = \frac{1}{-8.87 + j6.283}$$

所以其頻率轉移函數的增益值與相位值分別為:

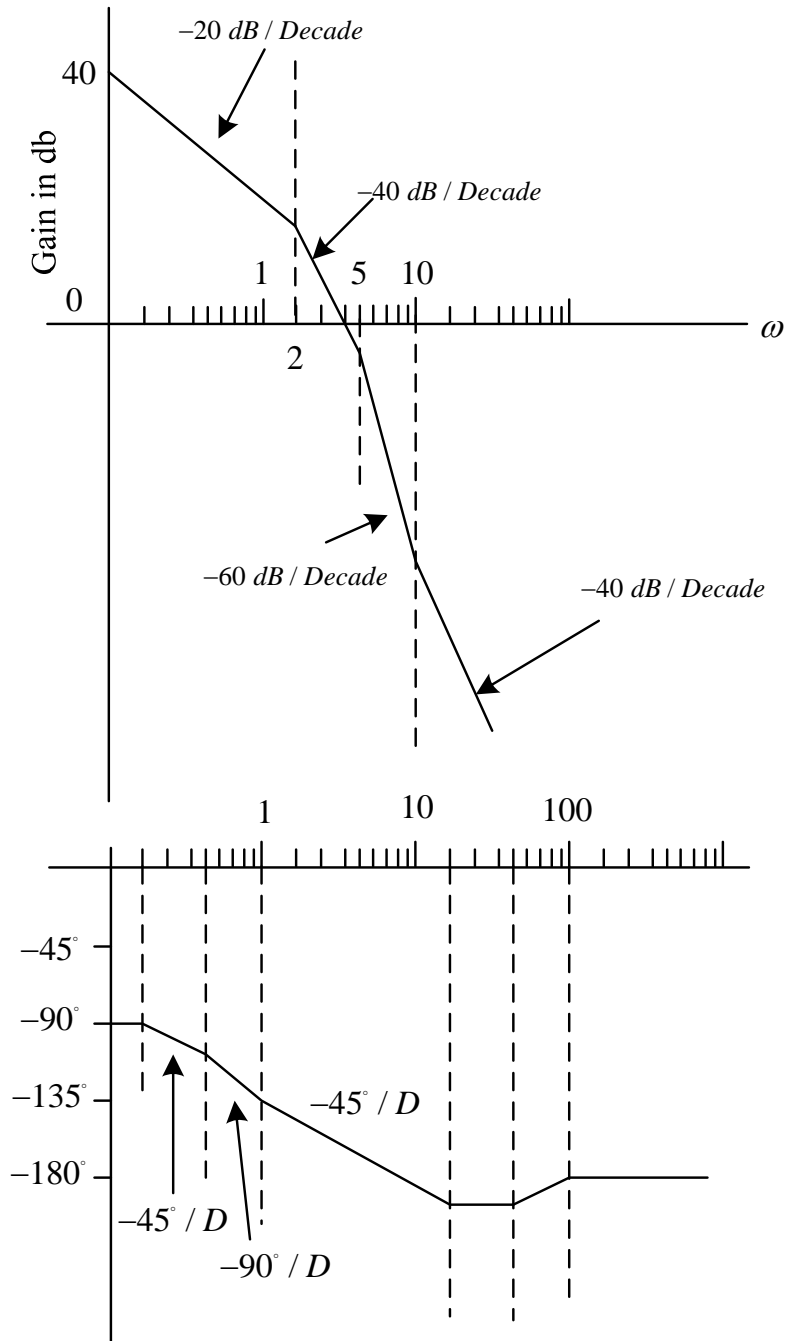
$$|G(j\pi)| = 0.092$$

$$\angle G(j\pi) = -144.69^\circ$$

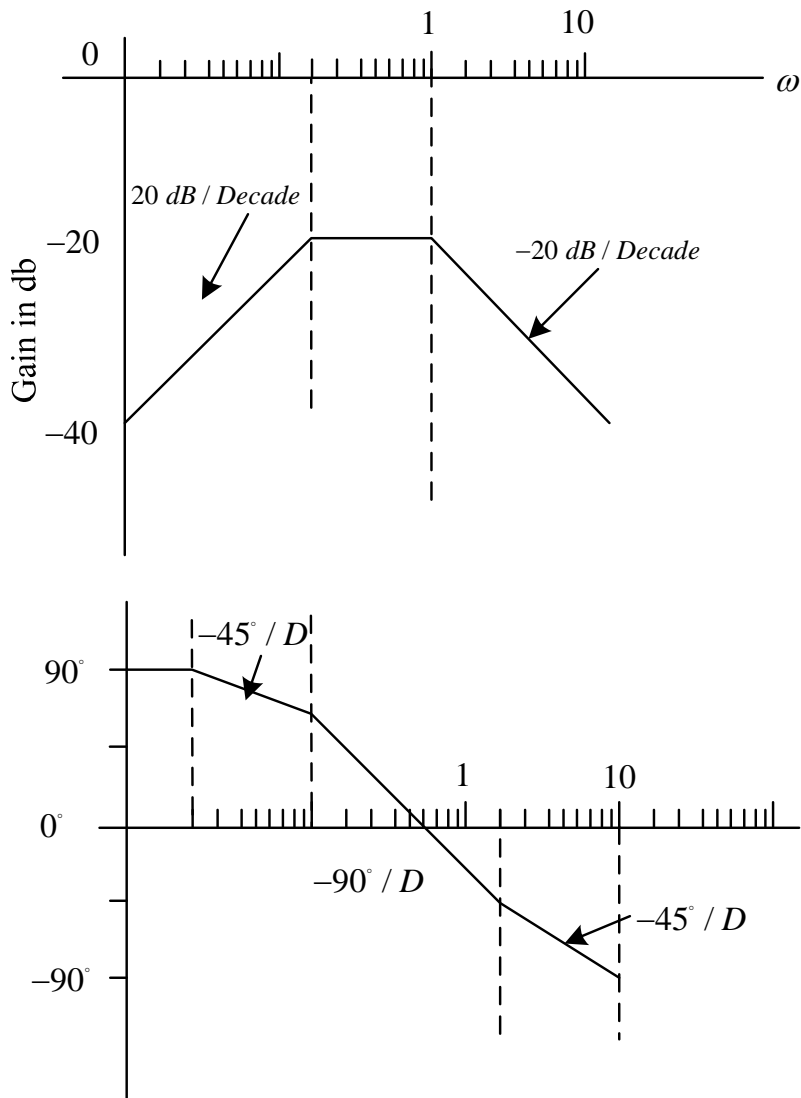
因此系統在頻率  $\omega = \pi$  的輸出穩態響應為  $2 \times 0.092 \sin\left(\pi t - 144.69 \times \frac{\pi}{180}\right)$

3. 求  $G(s) = \frac{10(s+10)}{s(s+2)(s+5)}$  的波德圖

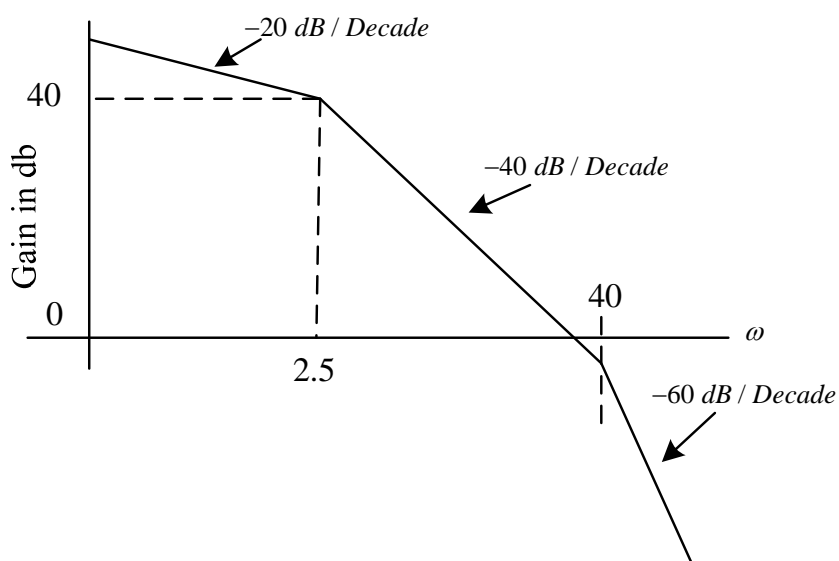
Ans: 零點的轉角頻率為 10 rad/sec，極點的轉角頻率為 2，5 rad/sec，因此波德圖為



4. 求  $G(s) = \frac{s}{(s+1)(5s+1)}$  的波德圖



5. 假設有一系統為極小相位，其波德大小如下圖所示，請求出該系統之轉移函數。



Ans:

因為轉角頻率為 2.5 與 40 rad/sec，且低頻斜率為 -20 dB/Decade，所以系統轉移函數為

$$G(s) = \frac{K}{s \left(1 + \frac{s}{2.5}\right) \left(1 + \frac{s}{40}\right)}$$

為了求解 K 值，我們省略  $\left(1 + \frac{s}{2.5}\right) \left(1 + \frac{s}{40}\right)$  的因式，並令  $G^*(s) = \frac{K}{s}$ ，則  $G^*(s)$  的

波德圖可視為原  $G(s)$  波德圖低頻線之延伸。在低頻線之延伸上可得

$\omega = 2.5 \text{ rad/sec}$  時，波德大小值 = 40dB，所以

$$20 \log \left| \frac{K}{j2.5} \right| = 40 \Rightarrow K = 250$$

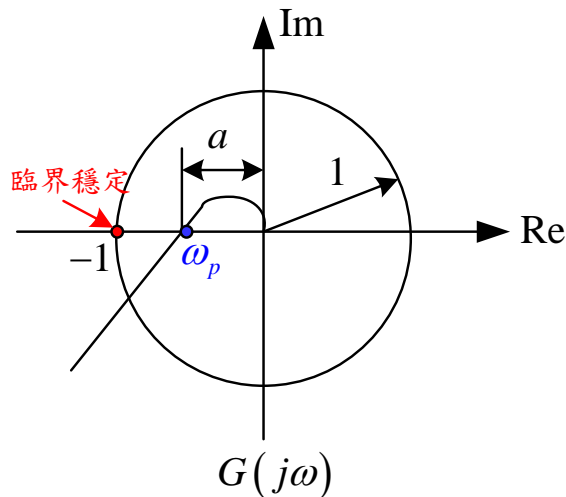
6. 考慮一開路系統轉移函數為  $G(s) = \frac{50}{s(s+1)(s+10)}$ ，請由羅斯表求出此系統

之增益邊限(Gain margin)

Sol:

Gain Margin 的物理定義為，系統到達臨界穩定前還能增加或減少的增益(gain) 倍數 (以 dB 為單位)。

由極座標圖來看:



$$G.M. = 20 \log \frac{1}{|G(j\omega_p)|} = 20 \log \frac{1}{a} (dB),$$

where  $\omega_p$  is phase cross over frequency

求 gain margin:

$$\text{令 } G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+10)}$$

閉迴路特徵方程式： $s^3 + 11s^2 + 10s + K = 0$

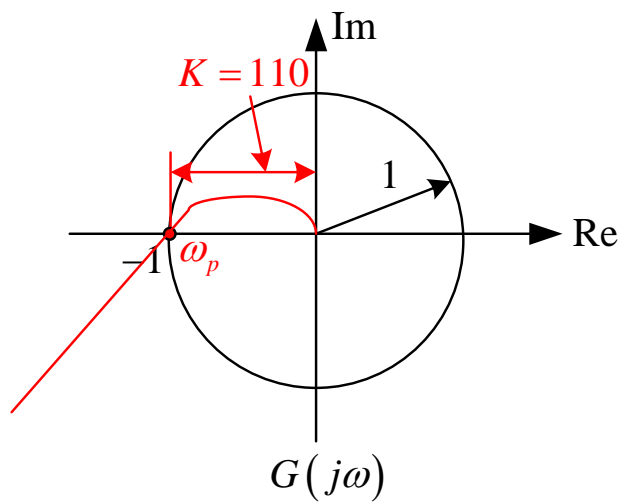
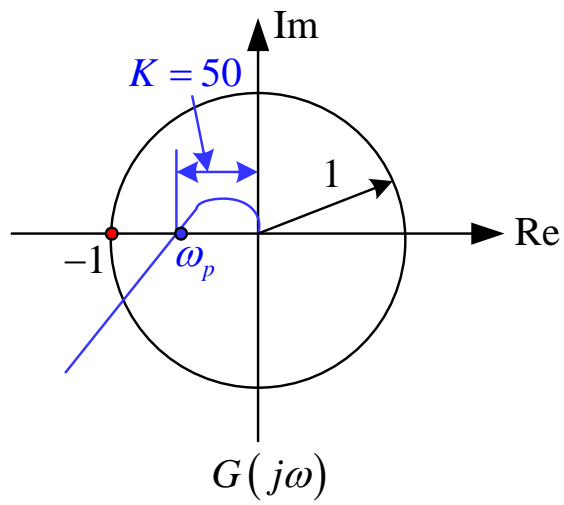
建羅斯表:

$s^3$	1	10
$s^2$	11	K
$s^1$	$\frac{110-K}{11}$	0
$s^0$	K	

所以  $0 < K < 110$  時閉迴路穩定

本題的  $K=50$  介於  $0 \sim 110$  之間所以系統是穩定的

若由極座標圖來看：



故用 gain margin 的物理意義求 gain margin:

$$G.M. = 20\log\left(\frac{110}{50}\right) = 6.85dB$$