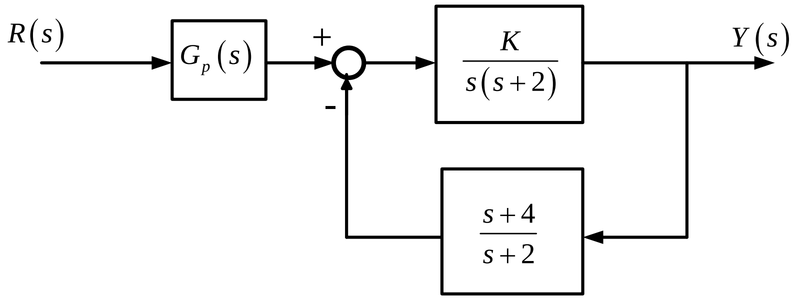
1. **考慮一迴授系統如下圖所示，**

(a)當 $K=0.4$ **、** $G_p(s)=1$ **且輸入 R(s)為單位步階訊號(unit step)時，請問該系統的穩態誤差為何?**

(b) 請問當 $G_p(s)$ **為何時，會使得單位步階響應的穩態誤差為零。**



Solution：

(a) 考慮誤差為

$$E(s)=\left[1\text{-}T(s)\right]R(s)$$

當輸入為 $R(s)=1/s$ 時的穩態誤差為

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\left[1\text{-}T(s)\right]R(s)=\lim_{s\to 0} s\left[1\text{-}T(s)\right]\frac{1}{s}=1\text{-}T(0)$$

而系統的閉迴路轉移函數為

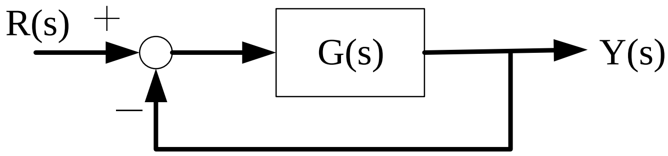
$$T(s)=\frac{K(s+2)}{s(s+2)(s+2)+K(s+4)}\Rightarrow T(0)=0.5$$

因此 $e_{ss}=1-T(0)=0.5$

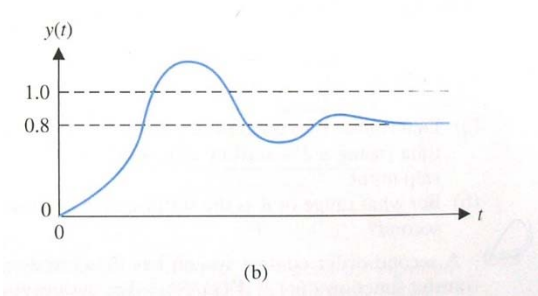
(b) 當 $G_p(s)=2$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\left[1\text{-}T(s)G_p(s)\right]R(s)=\lim_{s\to 0} s\left[1\text{-}T(s)G_p(s)\right]=1-2T(0)=0$$

2. 考慮一控制系統如下圖(a) 所示，其單位步階響應如圖(b)所示。請問當 K 值為多少時，可使穩態誤差等於零。



(a)



(b)

Solution：

系統的輸出為

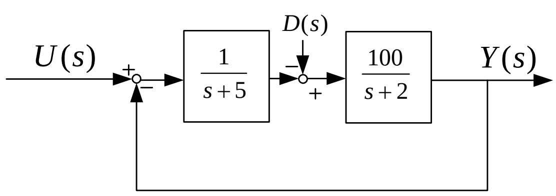
$$Y(s) = T(s)R(s) = K\frac{G(s)}{1+G(s)}R(s)$$

當 $K=1$，穩態誤差為 $e_{ss}=0.2$ ，其表示 $\lim_{s\to 0} sY(s) = 0.8$.

由於希望透過 K 使得 $e_{ss}=0$ ，因此可知 $\lim_{s\to 0} sKY(s) = 1$ ，即 $0.8K=1$

因此 $K=1.25$

3. 考慮下圖



當輸入 U(s)及外擾 D(s)皆為單位步階時，請求出系統穩態誤差為何?

Ans:

當系統同時存在參考輸入與輸入干擾時，此時的輸出訊號根據線性系統的重疊原

理可解得

$$Y(s)=\frac{\frac{100}{(s+2)(s+5)}}{1+\frac{100}{(s+2)(s+5)}}\times R(s)+\frac{\frac{100}{(s+2)}}{1+\frac{100}{(s+2)(s+5)}}\times(-D(s))$$

$$=\frac{100}{s^2+7s+110}\times R(s)+\frac{100(s+5)}{s^2+7s+110}\times(-D(s))$$

因此誤差訊號為

$$E(s)=R(s)-Y(s)$$

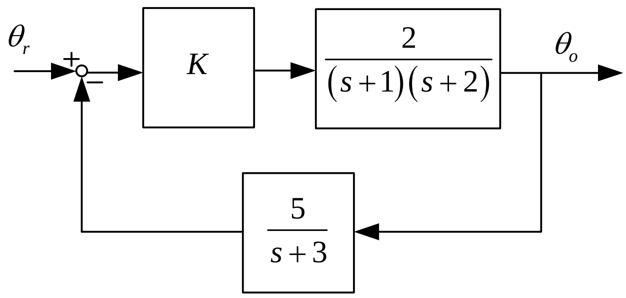
$$=R(s)-\frac{100}{s^2+7s+110}\times R(s)+\frac{100(s+5)}{s^2+7s+110}\times(-D(s))$$

$$=\frac{s^2+7s+10}{s^2+7s+110}\times R(s)+\frac{100(s+5)}{s^2+7s+110}\times(D(s))$$

當 R(s) 與 D(s) 均為單位步階函數時，sE(s)的極點在 s 左半平面，所以利用終值定理即可求得整個系統的穩態誤差為

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\frac{10}{110}+\frac{500}{110}=\frac{51}{11}$$

4. 考慮下面的控制系統:



請決定 K 的範圍使得系統為穩定

當步階輸入為 $\theta_r(t)=0.1$ **時，請決定 K 的範圍使得系統穩態誤差小於 0.02**

Solution:

閉迴路特性方程式為 $s^3+6s^2+11s+(6+10K)=0$，利用羅斯表測試求 K 值穩定範圍:

s^3　1　11

s^2　6　6+10K

s^1　$\dfrac{30\text{-}5K}{3}$

s^0　6+10K

若希望系統閉迴路穩定，則30-5K>0，6+10K>0，亦即-0.6<K<6。

此例題已給定誤差$e=\theta_r-\dfrac{5}{s+3}\theta_o$，亦即$E(s)$=$\theta_r(s)-\dfrac{5}{s+3}\theta_o(s)$，其中$\theta_r(s)$為輸入訊號，$\theta_o(s)$為輸出訊號，$\dfrac{5}{s+3}$代表測量器$H(s)$。因此本例題屬於觀點一的非單位回授系統之誤差定義。根據上述討論，我們必須先求解$E(s)$，再利用終值定理求穩態誤差。

$$E(s)=\theta_r(s)-\frac{5}{s+3}\theta_o(s)$$

$$=\theta_r(s)-\frac{10K}{s^3+6s^2+11s+(6+10K)}\theta_r(s)$$

$$=\frac{s^3+6s^2+11s+6}{s^3+6s^2+11s+(6+10K)}\theta_r(s)$$

因為$\theta_r(t)=0.1$，所以$\theta_r(s)=\dfrac{0.1}{s}$，代入上式得

$$E(s)=\frac{s^3+6s^2+11s+6}{s^3+6s^2+11s+(6+11K)}\times\frac{0.1}{s}$$

現在利用終值定理可得：

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\frac{0.6}{6+10K}$$

根據規格要求，穩態誤差必須小於0.02，所以

$$\left|\frac{0.6}{6+10K}\right|<0.02$$

解得$K<-3.6$或$2.4<K$。但是考慮閉迴路的K值範圍必須滿足$-0.6<K<6$，因此可推得符合穩態誤差規格要求的K值範圍應為$2.4<K<6$。

5. 考慮二階閉迴路系統如下

$\dfrac{Y(s)}{R(s)}=\dfrac{K(s+\alpha)}{s^2+4s+8}$**，其中參數**$K$**及**$\alpha$**為可調的參數。當輸入為單位斜坡輸入**

$R(s)=\dfrac{1}{s^2}$，**請決定**K**及**α**的值使得穩態誤差為零。**

Solution:
本例題是求單位斜坡輸入的穩態誤差之相關問題。但是題目給定的是整個閉迴路轉移函數，原系統是否為單位回授並不知道。此時我們當然必須以觀點二的誤差定義來思考穩態誤差才有意義，因為觀點二的誤差定義為$E(s)=R(s)-Y(s)$，對任何的回授結構均可適用。現在利用等效單位回授的觀念來求解穩態誤差，令閉迴路轉移函數為

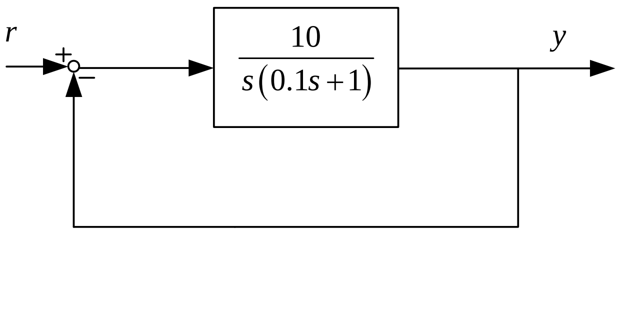
$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K(s+\alpha)}{s^2+4s+8}$$
$$=\frac{K(s+\alpha)}{s^2+4s+8-K(s+\alpha)+K(s+\alpha)}$$
$$\overset{\Delta}{=}\frac{G(\mathrm{s})}{1+G(s)}$$

所以$G(s)=\dfrac{K(s+\alpha)}{s^2+4s+8-K(s+\alpha)+K(s+\alpha)}$。現在若希望單位斜坡輸入的穩態誤差為零，則$e_{ss}(ramp)=\dfrac{1}{K_v}=0$，亦即$K_v=\infty$，因此

$$K_v=\lim_{s\to 0}sG(s)=\lim_{s\to 0}s\times\frac{K(s+\alpha)}{s^2+(4-K)s+(8-K\alpha)}=\infty$$

由此可推得$G(s)$必須為 type 2 以上，亦即$4-K=0,\ 8-K\alpha=0$，解得
$K=4,\ \alpha=2$。

6. 考慮一系統如下圖:



當輸入為$r(t)=1+2t$，**請決定系統穩態誤差為何?**

Solution:

本題為單位回授系統，輸入訊號為步階與斜坡訊號，所以先確定閉迴路是否穩定後，即可使用誤差常數公式求解穩態誤差。經判斷可知閉迴路是穩定的，且

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{10}{s(0.1s+1)} = \infty$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s \times \frac{10}{s(0.1s+1)} = 10$$

所以穩態誤差為

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} + \frac{2}{K_v} = 0.2$$

7. 考慮一閉迴路系統的轉移函數如下:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2K & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

(a) 請決定 K 的範圍使閉迴路系統穩定

(b) 當系統處於臨界穩定(marginally stable)時，請求得系統此時的振盪頻率

(c) 當 K=1,且輸入為單位步階，請求出系統響應的穩態誤差。

Ans:

(a)

系統的特徵方程式為

$$\det(\mathrm{sI} - A) = 0 \Rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 2 & 2K & s+3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 2Ks + 2 = 0$$

Routh table:

s^3	1	$2K$
s^2	3	2
s	$\frac{6K-2}{3}$	
s^0	2	

$$\frac{6K-2}{3}>0 \Rightarrow K>\frac{1}{3}$$

(b)

臨界穩定時，$K=\frac{1}{3}$

代回系統特徵方程式: $\Delta(s)=3s^3+9s^2+2s+6=(s+3)\left(3s^2+2\right)=0$

$$\left(3s^2+2\right)=s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2$$

$$\Rightarrow \omega_n=\sqrt{\frac{2}{3}}=0.816$$

(c)

當 K=1 時，系統閉迴路轉移函數:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=D+C(sI-A)^{-1}B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ 2 & 2 & s+3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{s^3+3s^2+2s+2}$$

$$E(s)=U(s)-Y(s)=\frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{s^3+3s^2+2s+2}\right)=\frac{s^3+3s^2+2s+1}{s^4+3s^3+2s^2+2s}$$

$$\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to0}sE(s)=\lim_{s\to0}\frac{s^3+3s^2+2s+1}{s^3+3s^2+2s+2}=\frac{1}{2}$$