

1. (a) 請舉例解釋什麼是 BIBO 穩定(Bounded Input Bounded Output Stability)?

(b) 請舉例解釋什麼是漸近穩定(Asymptotic Stability)?

(c) 試問在何種情況下 BIBO 穩定會等於 Asymptotic 穩定

Sol:

(a)

BIBO stable: 假設系統的初始狀態為 0，對任意有界輸入，系統都產生有界輸出，稱為 BIBO stable。(系統轉移函數的極點在左半平面)

(b)

Asymptotic stable: 系統狀態隨著時間趨近於無窮大而回歸到平衡點，稱此系統為漸近穩定。($\text{Re}(\lambda_i) < 0$, where $i = 1 \sim n$, λ_i 代表 A 矩陣的特徵值)

(c)

考慮 SISO 線性系統，當轉移函數沒有發生極零點對消，則系統極點=系統 eigenvalues，也就是 BIBO 穩定=漸近穩定。

2. 請以羅斯表(Routh-criterion) 判斷下列轉移函數是否穩定？

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 2}$$

Ans:

羅斯表

$$\begin{array}{l} s^3 \quad 1 \quad 1 \\ s^2 \quad 2 \quad 2 \quad A(s) = 2s^2 + 2 \\ s \quad 0 \quad 0 \quad dA(s)/ds = 4s \\ s \quad 4 \\ s^0 \quad 2 \end{array}$$

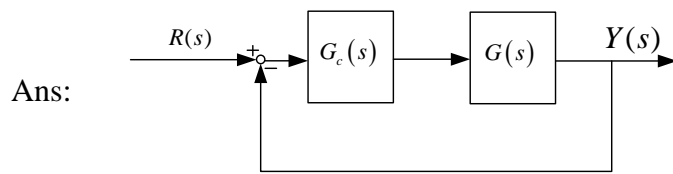
檢查羅斯表第一行元素沒有正負變號，但 $A(s)=0$ 解得 $s = \pm j$ ，表示特性方程式有兩個純虛根，所以系統是不穩定的。

3. 有一回授控制系統的方塊圖如下表示，其中受控系統的轉移函數

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)(s + 3)}$$

，控制器轉移函數 $G_c(s) = K$ ，試求控制器 K 值的範圍，

能使閉迴路穩定。



閉迴路轉移函數為

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + K}$$

利用特性方程式 $s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + K = 0$ 所得的羅斯表如下:

s^4	1	3	K
s^3	3	3	
s^2	2	K	
s	$\frac{3K-6}{2}$		
s^0	K		

若希望閉迴路系統穩定，亦即閉迴路極點均在 s 左半平面，則羅斯表第一行元素

必須全部為正(沒有正負變號)，所以 $\frac{3K-6}{2} > 0, K > 0 \Rightarrow 0 < K < 2$

4. 考慮單一輸入單一輸出系統 $y'''(t) + y''(t) + 6y'(t) + (k-3)y(t) = u(t)$ ，求使得系統穩定的 k 值範圍

Ans:

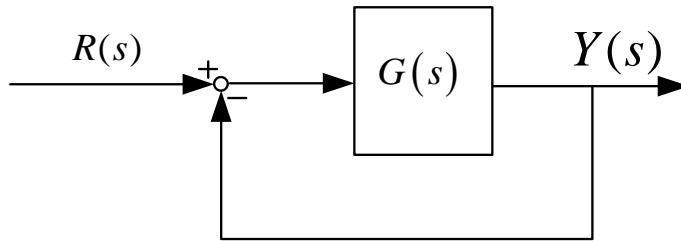
對系統微分方程式取拉式轉換，並令初值為零，則可得系統的轉移函數為

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + s^2 + 6s + k - 3} \quad \text{其羅斯表為}$$

s^3	1	6
s^2	1	$k-3$
s	$9-k$	
s^0	$k-3$	

所以 k 值穩定範圍必須滿足 $9-k > 0, k-3 > 0 \Rightarrow 3 < k < 9$

5. 考慮閉迴路系統 $G(s) = \frac{1}{s(1+0.5s)(1+s)}$ ，請求出相位邊限(Gain margin)。



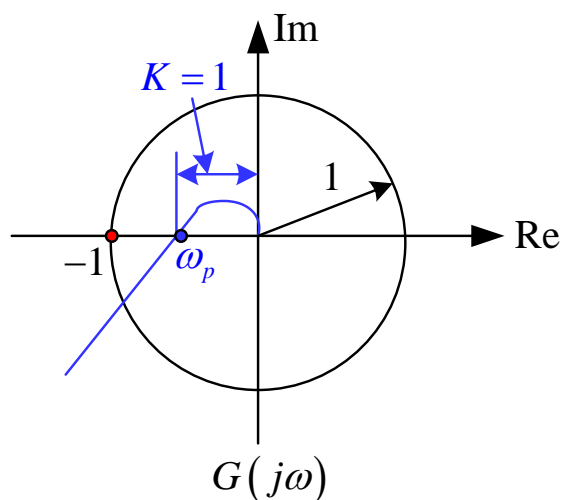
Ans:

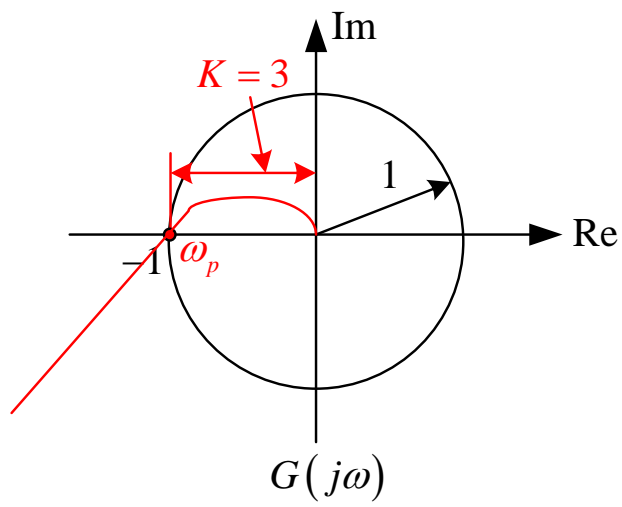
令 $G(s) = \frac{K}{s(1+0.5s)(1+s)}$ ，則閉迴路特性方程式為： $s^3 + 3s^2 + 2s + 2K = 0$ ，利

用羅斯表判斷閉迴路穩定的 K 值範圍：

s^3	1	2
s^2	3	2K
s	$\frac{6-2K}{3}$	
s^0	2K	

因此閉迴路穩定的 K 值範圍是 $0 < K < 3$ 。而目前系統的 K 值為 $K=1$ ，若由極座標圖來看：





根據 Gain Margin 的物理定義:系統到達臨界穩定前還能增加或減少的增益(gain)倍數 (以 dB 為單位)。

故可求得 $G.M. = 20\log 3 = 9.54 \text{ dB}$