

1. 考慮系統轉移函數如下：

$$G(s) = \frac{4s^2 + 25s + 38}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

若系統之狀態空間表示式為：

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} X + gu, \quad x(0) = 0, \text{ 試求 } a, b, g$$
$$y = [1 \quad 1 \quad 1] X$$

ANS:

由於分解後的 A 矩陣為對角矩陣，故本題希望採用並聯分解法。將 $G(s)$ 因式分解為：

$$G(s) = \frac{4s^2 + 25s + 38}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} = \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+4}$$

根據題意，第一個狀態必須選擇其對應的特徵值 -2，因此遵循並聯分解的步驟，可得下列兩種可能的答案：

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 1 \quad 1] X$$

或

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 1 \quad 1] X$$

因此 $a = -3, b = -4, g = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 或 $a = -4, b = -3, g = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. 考慮系統轉移函數如下:

$$G(s) = \frac{s-1}{s(s^2+3s+2)}$$

請表示成狀態空間可控制典型式(Controllable Canonical Form).

Ans:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s-1}{s(s^2+3s+2)} = \frac{s-1}{s^3+3s^2+2s} \times \frac{X(s)}{X(s)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y(s) = (s-1)X(s) \\ U(s) = (s^3+3s^2+2s)X(s) \end{cases}$$

$$\stackrel{L^{-1}}{\Rightarrow} \begin{cases} y(t) = \dot{x} - x \\ u(t) = x^{(3)} + 3\ddot{x} + 2\dot{x} \end{cases}$$

Let $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \ddot{x}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_3 - 2x_2 + u(t) \\ y = x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

3. 考慮一系統:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \equiv Ax + Bu, x(0) = x_0$$

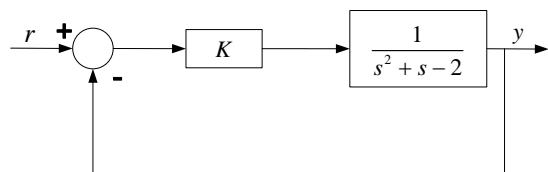
試求: 狀態轉移矩陣 $\Phi(t)$

ANS:

狀態轉移矩陣:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= L^{-1}[(sI - A)^{-1}] \\ &= L^{-1} \left[\begin{pmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{pmatrix}^{-1} \right] \\ &= L^{-1} \left[\frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{pmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{pmatrix} \right] \\ &= L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{-6}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \\ &= L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3} & \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \\ \frac{-6}{s+2} + \frac{6}{s+3} & \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4. 考慮控制系統如下



若定義 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, 系統狀態空間表示式可表示為:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + Br$$

, 試求:

$$y = C \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- (a) 狀態空間可控制典型式(Controllable Canonical Form)下的 A , B , C
- (b) A 矩陣之特徵值
- (c) 由(b)之結果, 試求 K 之範圍保證系統穩定
- (d) 使用羅斯表方法驗證(c)的結果

ANS:

因為 $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + s - 2 + K}$, 所以其微分方程式為:

$$\ddot{y} + \dot{y} + (K - 2)y = Kr$$

令狀態變數為 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, 則

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (2 - K)x_1 - 2x_2 + Kr \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 - K & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} r, y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

因此 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2-K & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix}$, $C = [1 \ 0]$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ K-2 & s+1 \end{bmatrix} = s^2 + s + (K-2) = 0$$

因此特徵值為 $s = \frac{-1 \pm \sqrt{9-4K}}{2}$

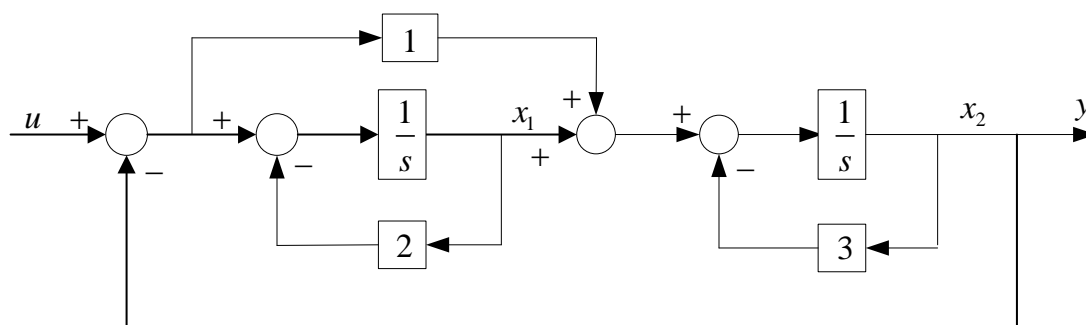
若閉迴路系統穩定，則特徵值必須在左半平面，因此：

$$\frac{-1 \pm \sqrt{9-4K}}{2} < 0 \Rightarrow K > 2$$

閉迴路系統特徵方程式 $s^2 + s + (K-2) = 0$ ，根據羅斯表：

$$\begin{array}{l|ll} s^2 & 1 & K-2 \\ s^1 & 1 & \\ s^0 & K-2 & \end{array} \Rightarrow K > 2 \text{ 即為穩定}$$

5. 考慮閉迴路系統如下圖：



使用輸入 u , 輸出 y , 與狀態 $[x_1 \ x_2]^T$ 寫出系統狀態空間表示式並解釋

u 至 y 之轉移函數系統是否可觀?

Ans:

根據上圖狀態的定義可得:

$$x_1 = \frac{1}{s}(u - y - 2x_1)$$

$$x_2 = \frac{1}{s}(x_1 + u - y - 3x_2)$$

$$y = x_2$$

整理之後為:

$$\begin{cases} sx_1 = u - y - 2x_1 \\ sx_2 = x_1 + u - y - 3x_2 \\ y = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 + u \\ y = x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}, x(0) = 0$$

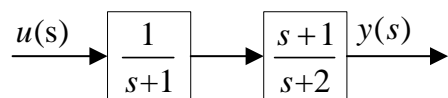
帶入公式 $C(sI - A)^{-1}B$ 可求得轉移函數為:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+3}{s^2+6s+9}$$

可觀性矩陣 $Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $rank(Q_o) = 2 =$ 階數, 可知系統是可觀

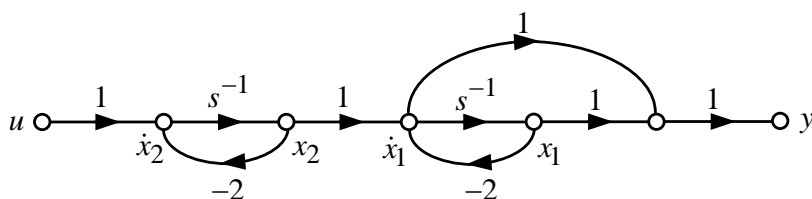
察的。

6. 考慮下圖，以二階狀態空間描述之系統是否為可控?是否為可觀?



Ans:

利用串聯分解法分解系統:



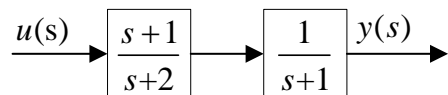
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{可控性矩陣: } Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{可觀性矩陣: } Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

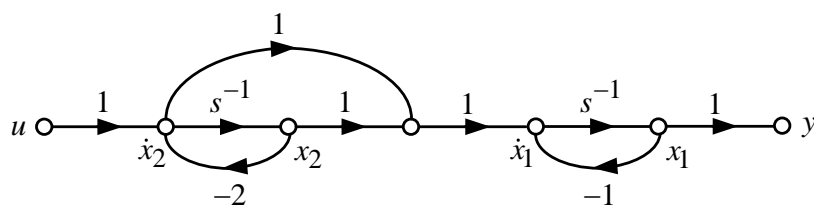
$\because \det(Q_c) \neq 0, \det(Q_o) = 0$ ，所以系統可控制但不可觀察

7. 考慮下圖，以二階狀態空間描述之系統是否為可控?是否為可觀?



Ans:

利用串聯分解法分解系統:



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{可控性矩陣: } Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{可觀性矩陣: } Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \det(Q_c) = 0, \det(Q_o) \neq 0$ ，所以系統不可控制但可觀察