

1. 考慮一特徵方程式 $1 + \frac{K}{s(s+5)(s+40)} = 0$ ，確認 $s = -5 + 5j$ 是否會落在跟軌跡上，如果是，請問 K 值為何？

Sol:

(方法一)

$$\text{令 } G(s) = \frac{1}{s(s+5)(s+40)}$$

若 $s = -5 + 5j$ 是根軌跡上的一點，則代入 $G(s) = -\frac{1}{K}$ 後 K 必須有實數解。

$$\frac{1}{(-5+5j)(-5+5j+5)(-5+5j+40)} = \frac{1}{-125(6+8j)} = -\frac{1}{K}$$

很明顯地，上述方程式中的 K 值無實數解(系統增益變數必為實數)，因此 $s = -5 + 5j$ 不落在此系統的跟軌跡上。

(方法二)

另外，亦可從相位關係來求證是否落在此系統的根軌跡上。

$$-\angle(-5+5j) - \angle(-5+5j+5) - \angle(-5+5j+40)$$

$$= - (90^\circ + \tan^{-1} \frac{5}{5}) - 90^\circ - \tan^{-1} \frac{5}{35}$$

$$= -233.13^\circ$$

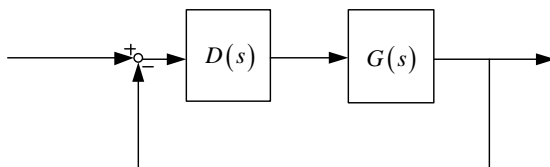
很明顯地， $s = -5 + 5j$ 帶入開路轉移函數後所得的相位值不等於奇數倍 180° 或偶數倍 180° ，所以相位關係不滿足，因此 $s = -5 + 5j$ 不落在系統的跟軌跡上。

注意：若某一點 s_1 位於此系統的根軌跡上，則根據根軌跡原理，將 s_1 代入大小關係可解得 K 值。該值即為 s_1 所對應的系統增益 K 值。

2. 一系統如下圖所示，其中 $D(s) = K(s+2)/(s+p)$ ， $G(s) = 1/s(s+1)$ 。

(1) 請用根軌跡設計方法找出 K 和 p 讓根軌跡通過點 $-3 \pm j3$ 。

(2) 請從(1)中的根軌跡找出第三個根。



Sol:

(1) 利用相位關係

$$\begin{aligned} \left. \angle \frac{s+2}{s+p} \times \frac{1}{s(s+1)} \right|_{s=-3+j3} &= \angle \frac{-1+j3}{[(p-3)+j3](-3+j3)(-2+j3)} - \angle(-5+5j+40) \\ &= \left(180^\circ - \tan^{-1} \frac{3}{1}\right) - \tan^{-1} \frac{3}{p-3} - \left(180^\circ - \tan^{-1} \frac{3}{3}\right) - \left(180^\circ - \tan^{-1} \frac{3}{2}\right) \\ &= -180^\circ \\ &\Rightarrow p = 8.25 \end{aligned}$$

再利用大小關係

$$\left| \frac{-1+j3}{(5.25+j3)(-3+j3)(-2+j3)} \right| = \frac{1}{k} \Rightarrow k = 29.25$$

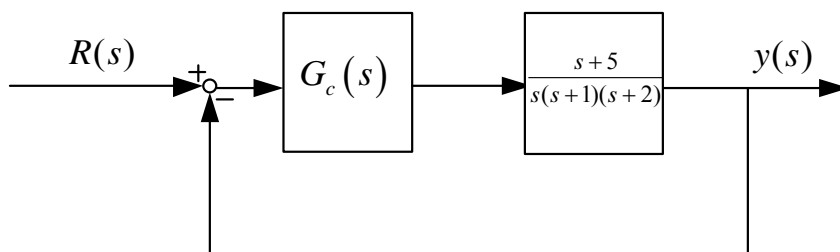
(2) 特徵方程式

$$\Delta(s) = s^3 + 9.25s^2 + 37.5s + 58.5 = (s^2 + 6s + 18)(s + a)$$

比較係數，得 $a = 3.25$

第三個極點 $s = -3.25$

3. 給定一控制系統



(1) 如果補償器為 $G_c(s) = K$ ，請畫出此控制系統之根軌跡與漸進線。請標明與虛軸的交點及其對應之 K 值。

(2) 如果補償器為 $G_c(s) = K \frac{s+2}{s+p}$ ，請找出 p 值讓點 $A = (-1, j4)$ 為根軌跡。

Sol:

$$(1) \text{ 令 } G(s) = \frac{s+5}{s(s+1)(s+2)},$$

(a) $G(s)$ 極點： $s = 0, -1, -1, n = 3$

$G(s)$ 零點： $s = -5, m = 1$

(b)實軸上的根軌跡： $[-5,-2],[-1,0]$

(c)漸進線與實軸的交點： $\sigma_A = \frac{(-3)-(-5)}{2} = 1$

漸進線角度： $\theta_A = \frac{\pm(2q+1)180^\circ}{2} = \pm 90^\circ$

(d)分離點滿足 $\frac{dG(s)}{ds} = 0$, 解得 $s^3 + 9s^2 + 15s + 5 = 0$

$$\Rightarrow s = -6.49, -1.6, -0.45$$

假設只劃 $K > 0$ 的根軌跡

(e) 根軌跡與虛軸交點: 閉迴路特性方程式為:

$$s^3 + 3s^2 + (2 + K)s + 5K = 0$$

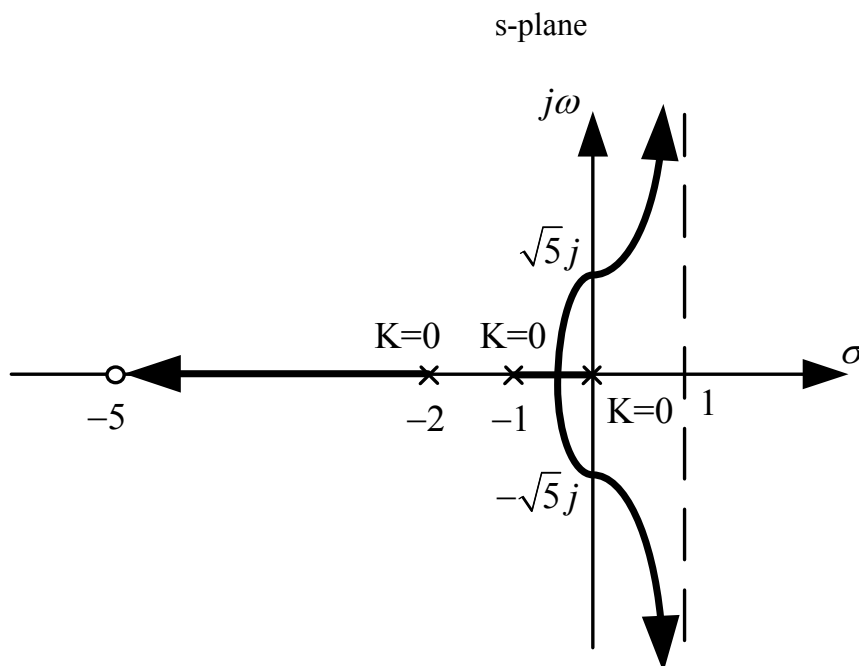
羅斯表:

s^3	1	$2+K$
s^2	3	$5K$
s	$\frac{6-2K}{3}$	
s^0	$5K$	

當 $K=3$ 時，羅斯表 s 列全部為零，利用 s^2 列輔助方程式 $A(s) = 3s^2 + 15 = 0$ ，解

得 $s = \pm j\sqrt{5}$ 。此即為根軌跡與虛軸的交點，而該交點的 $K = 3$ 。

(f) 根軌跡圖:



若 $G_c(s) = K \frac{s+2}{s+p}$ ，則開路轉移函數為 $G_c(s)G(s) = \frac{K(s+5)}{s(s+1)(s+p)}$ 。

若要求 $A = (-1, j4)$ 落在根軌跡上，則下列相位關係必須滿足：

$$\begin{aligned}\angle G_c G(-1+j4) &= \angle \frac{4+j4}{(-1+j4)(j4)(-1+p+j4)} \\ &= 45^\circ - 104^\circ - 90^\circ - \tan^{-1} \frac{4}{p-1} \\ &= -180^\circ\end{aligned}$$

所以解得 $p=7.66$

4. 請找出特徵方程式 $1+KG(s)=0$ 的根軌跡，其中 $G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$ 。

Ans:

(a) $G(s)$ 極點： $s = 0, -2$

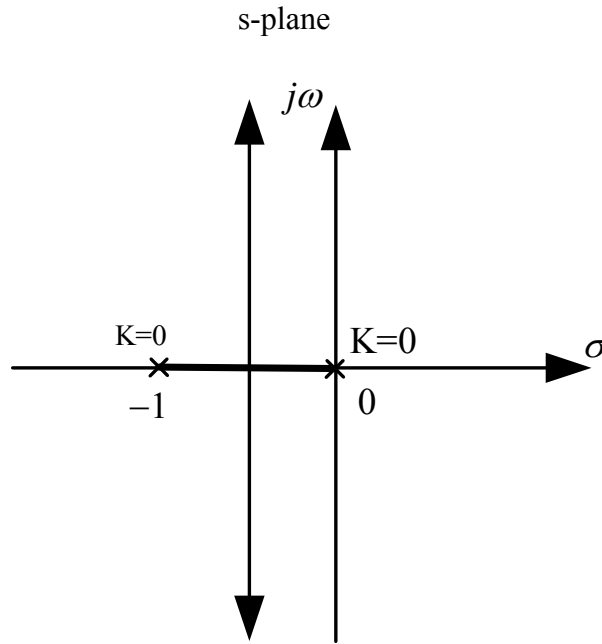
(b) 實軸上的根軌跡： $[0, -2]$

(c) 漸進線與實軸的交點： $\sigma_A = \frac{(0) - (-2)}{2} = 1$

漸進線角度： $\theta_A = \frac{\pm(2q+1)180^\circ}{2} = \pm 90^\circ$

(d) 分離點滿足 $\frac{dG(s)}{ds} = 0$ ，解得 $s = 1$

(e) 根軌跡圖：



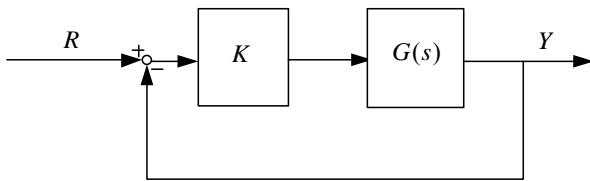
5. 考慮一單位迴授系統，其中控制器增益 K 與受控系統 $G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+9)}$ 。當

$G(s)$ 的相位於 180° 時根軌跡的分離點(重合點)為 $s = -3$ 。其中特徵方程式

為 $s^3 + 9s^2 + ks + k = 0$ 。

(1) 請找出在分離點 $s = -3$ 之 K 值 (K_0) 與該點之多重根。

(2) 令 $K = K_0 + K_1$ ，求根軌跡為 K_1 ，找到分離點之離開角與到達角。



Ans:

(1)

(a) 利用大小關係

$$\left| \frac{s+1}{s^2(s+9)} \right|_{s=-3} = \frac{1}{K_0} \Rightarrow K_0 = 27$$

分離點滿足 $\frac{d}{ds} G(s) = 0$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{s+1}{s^2(s+9)} \right) = 0$$

得 $s = -3, -3, -3$

(2)

令 $K_0 = 27$ ，則 $K = 27 + K_1$ 帶入 $\Delta(s)$

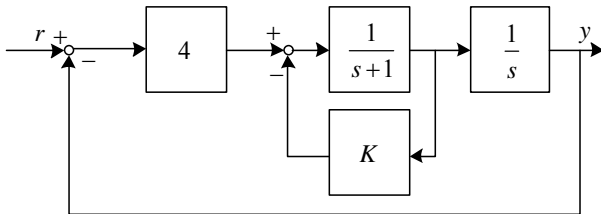
$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta(s) &= s^3 + 9s^2 + (27 + K_1)s + (27 + K_1) \\ &= 1 + K_1 \frac{s+1}{(s+3)^3} = 1 + K_1 G_1(s) = 0 \end{aligned}$$

利用 $G_1(s)$ 討論分離點的離開角，將 $s = -3, -3, -3$ 視為極點，則

$$\phi_2 = -2(180^\circ) = -360^\circ \Rightarrow 3\phi_p = \pm(2g+1)\pi + 360^\circ$$

得 $\phi_z = \pm 60^\circ \cdot 180^\circ$

6. 請找出 $K > 0$ 閉迴路系統之根軌跡。



Ans:

系統開路轉移函數為

$$G(s) = 4 \times \frac{1}{1 + \frac{K}{s+1}} \times \frac{1}{s} = \frac{4}{s(s+1+K)}$$

而閉迴路轉移函數為:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + s + Ks + 4}$$

其中特性方程式為 $s^2 + s + Ks + 4 = 0$ 。將特性方程式表示為 $1 + \frac{Ks}{s^2 + s + 4} = 0$ ，並

定義 $G^*(s) = \frac{Ks}{s^2 + s + 4}$ ，則可利用根軌跡的原理，針對 $G^*(s)$ 求 K 的改變所形成

的閉迴路根軌跡，注意，此時的 $G^*(s)$ 雖不是原系統結構下的開路轉移函數，但其對應的閉迴路特性方程式與原系統的閉迴路特性方程式相同，所以根軌跡是完全一樣的。

(a) $G^*(s)$ 極點： $s = -0.5 \pm j1.936$, $n = 2$

$G^*(s)$ 零點： $s = 0$, $m = 1$

(b) 實軸上的根軌跡： $[-\infty, 0]$

(c) 漸進線角度： $\theta_A = \frac{\pm(2q+1)180^\circ}{2} = 180^\circ$

(d) 極點 $-0.5 \pm j1.936$ 的離開角：

$$\phi_p = \pm(2q+1) + \phi_1$$

$$\phi_1 = -90^\circ + (180^\circ - \tan^{-1} 3.873) = 14.5^\circ$$

所以取 $\phi_p = 165.5^\circ$

(e)

分離點滿足 $\frac{dG^*(s)}{ds} = 0$ ，解得 $s^2 - 4 = 0$, $s = \pm 2$ ，因為只考慮 $K > 0$ 的根軌跡，所

以取分離點為 $s = -2$

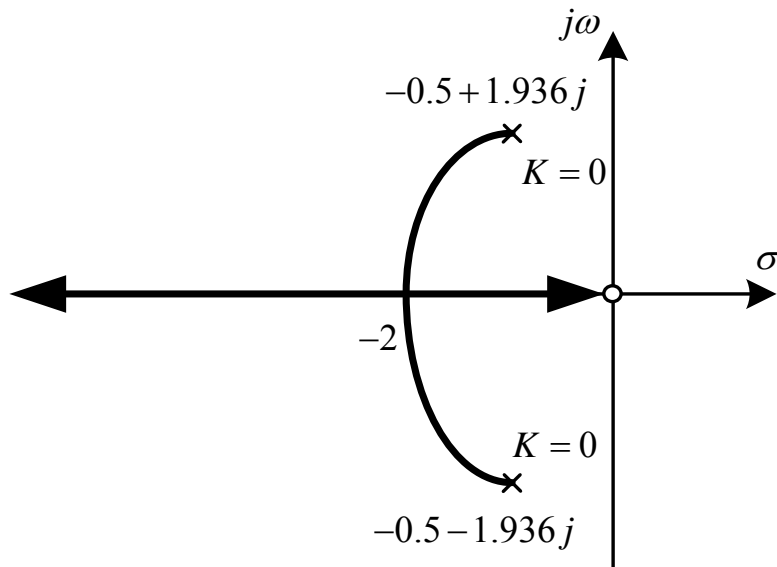
(f)

根軌跡與虛軸交點：閉迴路特性方程式 $s^2 + s + Ks + 4 = 0$ 羅斯表測試：

$$\begin{array}{r|l} s^2 & 1 & 4 \\ \hline s & 1+K & \\ \hline s^0 & 4 & \end{array}$$

若系統要穩定，則 $K > -1$

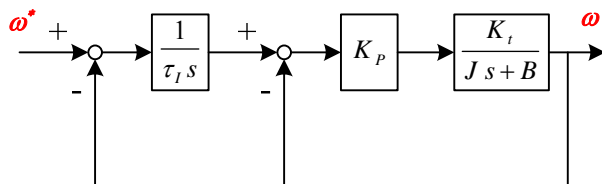
(g) 根軌跡圖:



7. 一伺服馬達採用 IP 控制器架構，其速度迴路控制系統如下圖所示。試以

K_p 為變數畫根軌跡圖形，其中 $J = 0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 、 $B = 0.4 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}$

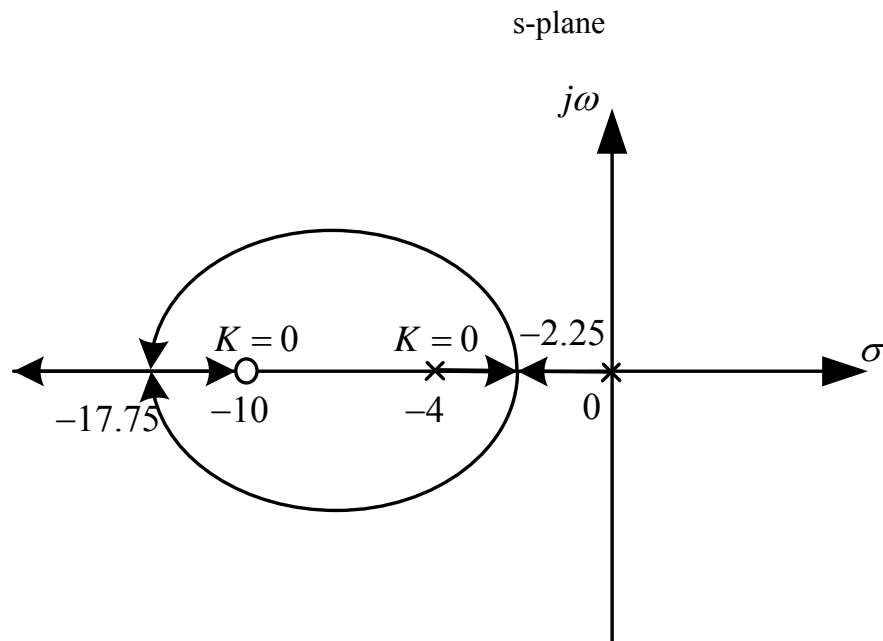
$K_t = 0.5 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{Amp}$ 及 $\tau_l = 0.1$ 。



Sol:

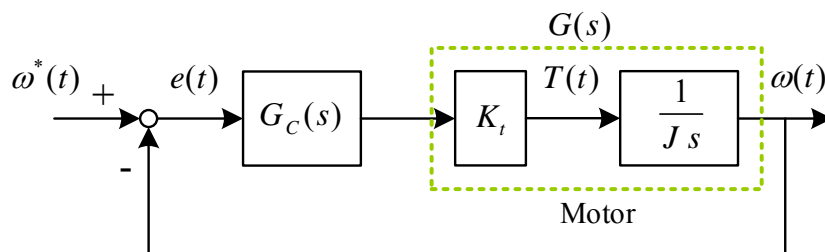
$$\begin{aligned}
T(s) &= \frac{\frac{K_p K_t}{\tau_i s (Js + B)}}{1 + \frac{K_p K_t}{Js + B} + \frac{K_p K_t}{\tau_i s (Js + B)}} \\
&= \frac{K_p K_t}{\tau_i s (Js + B) + \tau_i s K_p K_t + K_p K_t} \\
&= \frac{K_p K_t}{\tau_i J s^2 + \tau_i (B + K_p K_t) s + K_p K_t} \\
\Rightarrow s^2 + \frac{B}{J} s + \frac{K_p K_t}{J} s + \frac{K_p K_t}{\tau_i J} &= 0 \\
\Rightarrow 1 + \frac{\frac{K_p K_t}{J} s + \frac{K_p K_t}{\tau_i J}}{s^2 + \frac{B}{J} s} &= 0 \\
\Rightarrow 1 + K_p \frac{\tau_i K_t s + K_t}{\tau_i J s^2 + \tau_i B s} &= 0 \\
L(s) = \frac{\tau_i K_t s + K_t}{\tau_i J s^2 + \tau_i B s} &= \frac{5(s+10)}{(s^2 + 4s)}
\end{aligned}$$

分離點: $\frac{dL(s)}{ds} = 0 \Rightarrow s^2 + 20s + 40 = 0 \Rightarrow s = -2.25, -17.75$



8. 考慮馬達控制方塊圖如下，其中 $J=1$ ， $K_t=0.5$ ， $G_c(s)=K_p+\frac{K_i}{s}$ ，且

$$K_p=4。$$



請畫出系統隨著 K_i 變化時的根軌跡。

Ans:

$$\text{系統特徵方程式: } 1+G_c(s)G(s)=1+\frac{K_t}{Js}\left(K_p+\frac{K_i}{s}\right)=0$$

$$1+\frac{K_t}{Js}\left(K_p+\frac{K_i}{s}\right)=0$$

$$\Rightarrow 1+\left(\frac{K_t K_p}{Js}+\frac{K_t K_i}{Js^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow Js^2+K_t K_p s+K_t K_i=0$$

$$\Rightarrow 1+K_i \frac{K_t}{Js^2+K_t K_p s}=0 \Rightarrow 1+K_t L(s)=0$$

$$\Rightarrow L(s)=\frac{K_t}{Js^2+K_t K_p s}=\frac{0.5}{s^2+2s}$$

Root-locus:

(a) $G(s)$ 極點： $s=0,-2$

(b)實軸上的根軌跡： $[0,-2]$

(c)漸進線與實軸的交點： $\sigma_A=\frac{(-2)-(0)}{2}=-1$

漸進線角度： $\theta_A=\frac{\pm(2q+1)180^\circ}{2}=\pm 90^\circ$

(d) 分離點滿足 $\frac{dG(s)}{ds} = 0$, 解得 $s = -1$

(e) 根軌跡圖:

