1.　當使用 PID 控制器時，請問比例控制器 K_P ，積分控制器 $\frac{K_I}{s}$ 和微分控制器 $K_D s$ ，分別對系統的影響為何?

Solution：

(a) K_P ：藉由改變增益(gain)可調整系統的相對穩定度及穩態誤差。通常增益變大可降低穩態誤差，但會影響相對穩定度，反之增益變小增加相對穩定度，但增加穩態誤差。

(b) $\frac{K_I}{s}$ ：增加在原點的極點，可消除穩態誤差，並有利於高頻雜訊抑制。但積分控制可能促使系統不穩定，即使系統仍屬穩定，其暫態響應性能(如：最大超越量，起升時間)通常會變得較差。

(c) $K_D s$ ：微分控制器可改善系統的阻尼及暫態響應，並增加相對穩定度。但易受高頻雜訊影響，且無法改善穩態誤差。

2.　已知一補償器之轉移函數 $G_c(s)=\frac{1.45s+0.35}{s+0.07}$ ，

(1)求此補償器之直流增益值(dc gain)。

(2)求此補償器之高頻增益值(high-frequency gain)。

(3)此補償器為相位領先(phase-lead)還是相位落後(phase-lag)？為什麼？

Solution：

(1) $\lim_{s\to 0} G_c(s)=\frac{0.35}{0.07}=5=13.98dB$

(2) $\lim_{S\to\infty} G_c(s)=1.45=3.23dB$

(3) a. 高頻增益值小於直流增益值。

b. $\angle G_c(j\omega)=\tan^{-1}4.14\omega-\tan^{-1}14.28\omega<0$, $for\ \omega>0 \Rightarrow \angle G_c(j\omega)<0,$

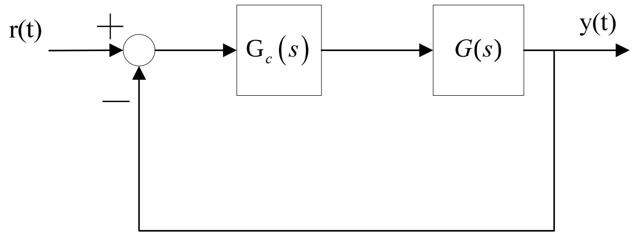
所以為相位落後補償器。

c. $G_c(s)=\frac{1.45s+0.35}{s+0.07}=\frac{(0.35)}{(0.07)}\frac{(1+4.143s)}{(1+14.286s)} \Leftrightarrow K\frac{1+Ts}{1+\beta Ts} \Rightarrow \beta>1$

綜合以上三點，此補償器為相位落後補償器。

3. **考慮一單位迴授系統如下圖所示，其中受控系統** $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$ **，**

而補償器 $G_c(s)=\dfrac{5+50s}{1+87s}$ **。**



試求：

(1) 補償器 $G_c(s)$ 之直流增益值(dc gain)。

(2) 補償器 $G_c(s)$ 之高頻增益值(high-frequency gain)。

(3) 說明此補償器為相位領先或落後？

Solution：

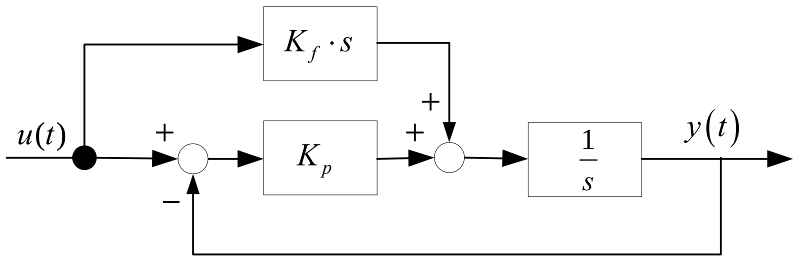
(1) $s \to 0 \Rightarrow dc\ gain = 5$

(2) $s \to \infty \Rightarrow high\ frequency\ gain = 50/87$

(3) $zero: 1/10\ (rad/\sec)$ & $pole: 1/87\ (rad/\sec)$

高頻增益值低於低頻增益值，此為一相位落後補償器

4. **考慮前饋控制器(Feed forward controller)架構，如下圖所示：**



(1) 當 $K_f = 0$ **時，求其轉移函數** $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = ?$

(2) 當 $K_f \neq 0$ **時，求其轉移函數** $\dfrac{Y(s)}{U(s)} = ?$

(3) 若輸入 u **為斜坡(ramp)函數;** $u(t)=Ft$ **，其中** F **為進給率，試分析其穩態誤差為何？(時間 t 的單位為秒)**

Solution：

(1) $K_f=0 \Rightarrow T(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{\frac{K_p}{s}}{1+\frac{K_p}{s}}=\dfrac{K_p}{s+K_p}$

(2)

$$K_f \neq 0 \Rightarrow Y(s)=\frac{K_p}{s+K_p}U(s)+U(s)\times K_f\times s\times\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{K_p}{s}}$$

$$=(\frac{K_p}{s+K_p}+\frac{K_f\times s}{s+K_p})U(s)=(\frac{K_p+K_f\times s}{s+K_p})U(s)$$

(3) 利用終值定理：$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)$ & $u=\dfrac{F}{60s^2}$

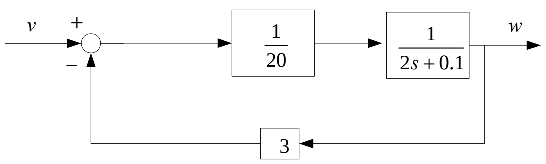
$$E(s)=\left(1-\frac{K_f s+K_p}{s+K_p}\right)\cdot\frac{F}{60s^2}\text{，}e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\cdot E(s)=\frac{\left(1-K_f\right)F}{60K_p}$$

5.　考慮一控制系統之方塊圖如下圖(a)所示:

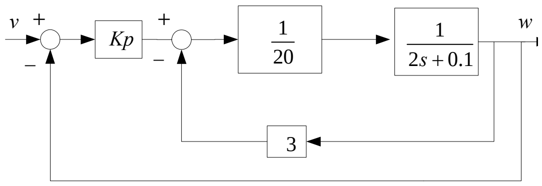
(a)試求系統從 v 到 w 之 DC gain 及其時間常數τ各為何?

並請分別解釋 DC gain 及時間常數之物理意義為何?

(b)若將此系統以 P-controller 做回授控制(如圖 b)，試設計一 Kp 值，使其穩態時間為 0.5 秒。(將四倍的時間常數視為系統達到穩態誤差的時間)。



圖(a)



圖(b)

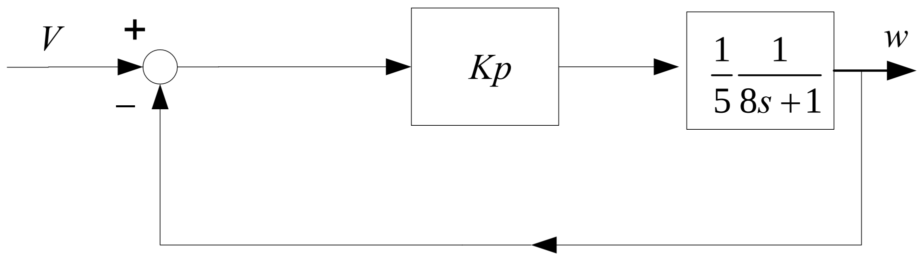
Solution：

(a)

$$\frac{w}{v}=\frac{\frac{1}{20}\times\frac{3}{2s+0.1}}{1+\frac{1}{20}\times\frac{1}{2s+0.1}}=\frac{1}{40s+5}=\frac{1}{5}\frac{1}{8s+1}$$

$dc\ gain=1/5=0.2\ \ \&\ \ \tau=8\,(\text{sec})$

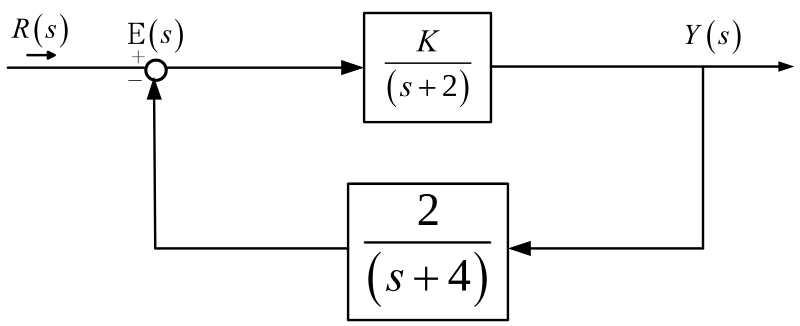
DC gain：為系統對單位步階之穩態響應(steady-state)
時間常數：為系統對單位步階輸入時，達到穩態值 0.632 時所對應的時間。
(b)



$$\frac{v}{w}=\frac{\frac{Kp}{5(8s+1)}}{1+\frac{Kp}{5(8s+1)}}=\frac{Kp}{40s+(5+Kp)}=(\frac{Kp}{5+Kp})(\frac{1}{(\frac{40}{5+Kp})s+1})$$

$$dc\ gain=\frac{K_p}{5+K_p}\ \ \&\ \ \tau=\frac{40}{5+Kp}\Rightarrow 4\tau=0.5\ \ ,\ \ K_p=315$$

6. 考慮控制系統如下圖所示，試求增益 K 值，使步階響應的穩態誤差為 0。



Solution：
實際的誤差為 $E(s)=[1-T(s)]R(s)$，經拉氏轉換可得步階響應的穩態誤差為

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s\left[1-T\left(s\right)\right]\frac{1}{s}\quad\cdots\cdots(1)$$

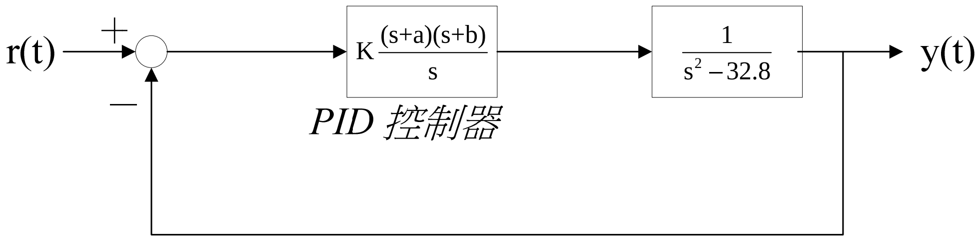
其中 $T(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\dfrac{K(s+4)}{(s+2)(s+4)+2K}\Rightarrow \mathrm{T}(0)=\dfrac{4K}{8+2K}$

帶回(1)式可得

$e_{ss}=\left[1-T(0)\right]=1-\dfrac{4K}{8+2K}=0$

$\Rightarrow$ K=4

7. 下圖為加入 PID 控制器的閉迴路系統，假設 a=0.2，請設計出 PID 控制器的 K 及 b 值，使得閉迴路系統的極點落在 $\lambda=-1\pm\sqrt{3}j$ ，並計算出第三個極點為何?



Sol:

$$T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{K\dfrac{(s+a)(s+b)}{s}\dfrac{1}{s^2-32.8}}{1+K\dfrac{(s+a)(s+b)}{s}\dfrac{1}{s^2-32.8}}=\frac{K(s+a)(s+b)}{s(s^2-32.8)+K(s+a)(s+b)}$$

特性方程式：

$\Delta(s)=s(s^2-32.8)+K(s+a)(s+b)=0$

$\Rightarrow \Delta(s)=s(s^2-32.8)+K(s+0.2)(s+b)=0$

$\Rightarrow s^3+Ks^2+(0.2K+bK-32.8)s+0.2Kb=0\cdots\cdots(1)$

因為閉迴路有一對共軛複數根 $-1\pm\sqrt{3}j$

$\Rightarrow \Delta(s)=(s+p)(s+1+\sqrt{3}j)(s+1-\sqrt{3}j)=0$

$\Rightarrow (s+p)(s^2+2s+4)=0$

$\Rightarrow s^3+(p+2)s^2+(2p+4)s+4p=0\cdots\cdots(2)$

比較系數 (1)(2) : $\begin{cases} K=p+2 \\ 0.2K+bK-32.8=2p+4 \\ 0.2Kb=4p \end{cases}$

$$\Rightarrow K = 4,\ b = 10\ ,\ p = 2\ \ \&\ \ the\ third\ pole : s = \text{-}2$$