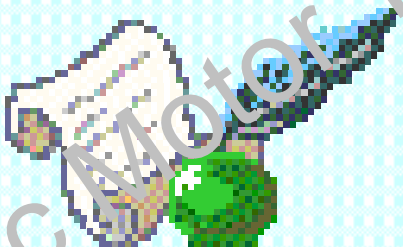


伺服控制

第四章 Lead-Lag相位補償器之介紹



何謂補償器

- ⊕ 何謂補償器
- ⊕ 相位領先補償器
- ⊕ 相位落後補償器
- ⊕ 相位領先及相位落後補償器的特性比較
- ⊕ 結論

對於一控制系統，為了要獲得一更適當的表現所作的改變或調整我們稱之為補償，也就是說，為了要彌補系統的不完美及不適當所作的調整稱為補償。而補償器就是一外加的元件或電路用以補償系統不完美的表現。

考慮一階補償器，其轉移函數形式為：

$$G_c(s) = K \frac{(s+z)}{(s+p)} = \frac{Kz}{p} \frac{\left(\frac{s}{z} + 1\right)}{\left(\frac{s}{p} + 1\right)} \rightarrow \text{頻率}=0, \text{ DC Gain}=Kz/p$$

似PD

相位領先補償器 (phase lead compensator):

似PI

$$|z| < |p|$$

增加響應度, 拉寬頻寬

相位落後補償器 (phase lag compensator):

$$|p| < |z|$$

於低頻時, 提高DC gain

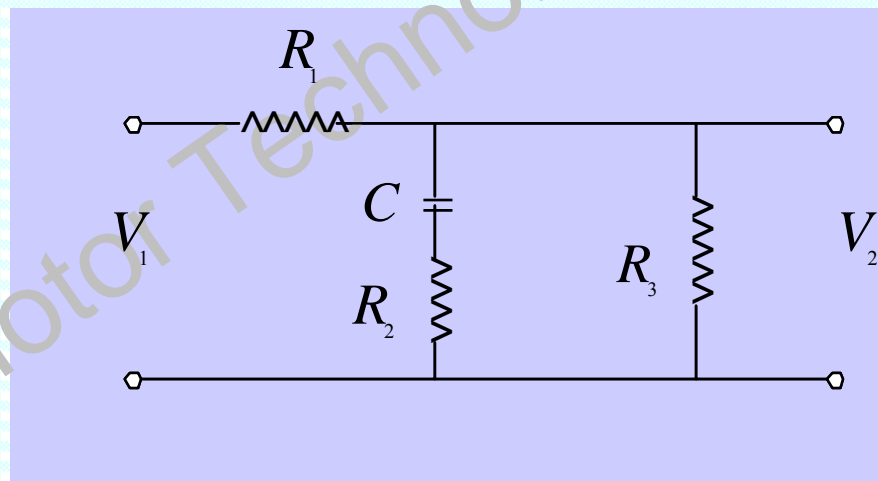
補償器都被放置於系統中最適切的位置。補償器配置的選擇端賴規格的考量、系統不同信號節點的power levels以及可獲得的網絡(network)

相位落後補償器 (Phase Lag Compensator)

從頻域響應的觀點：

相位落後是指正弦輸出訊號的相位落後於正弦輸入訊號。

一常見的相位落後補償器的RC電路如下：



相位落後補償器之轉移函數形式

$$T(s) = \frac{V_2}{V_1} = k \frac{\tau_z S + 1}{\tau_p S + 1}$$

T.F. → 電壓到電壓 → 沒有單位

如何從電路圖中直接看出轉移函數之各個參數??

(1) 求k值：令 $s \rightarrow 0$

$$T(s) \Big|_{s \rightarrow 0} = k$$

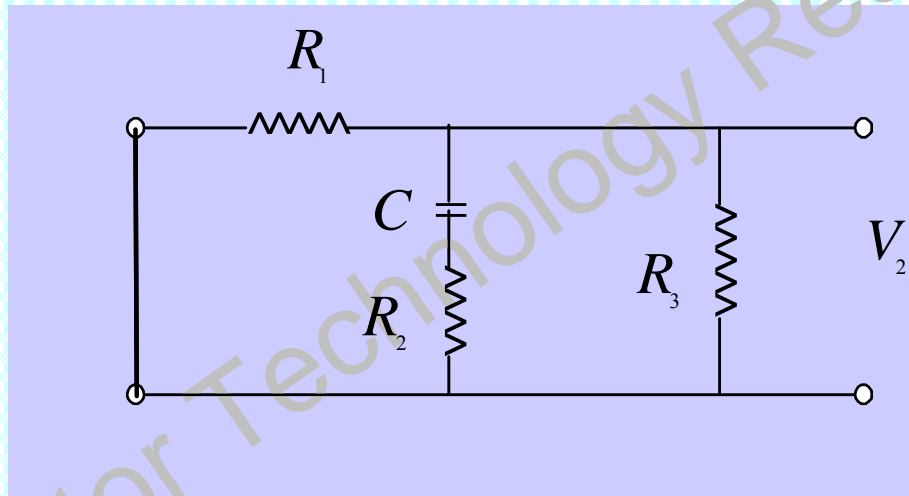
由於 $s \rightarrow 0$ 時表示電容阻抗為無窮大,因此電容相當於斷路,所以由電路圖可看出此時輸入輸出的比值為:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

$$\therefore k = \frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

(2) 求 τ_p 值：令轉移函數之分母為零

亦即 $V_1 = 0$ ，也就是說將 V_1 兩端短路在一起，
因此此時原來的電路圖變為：

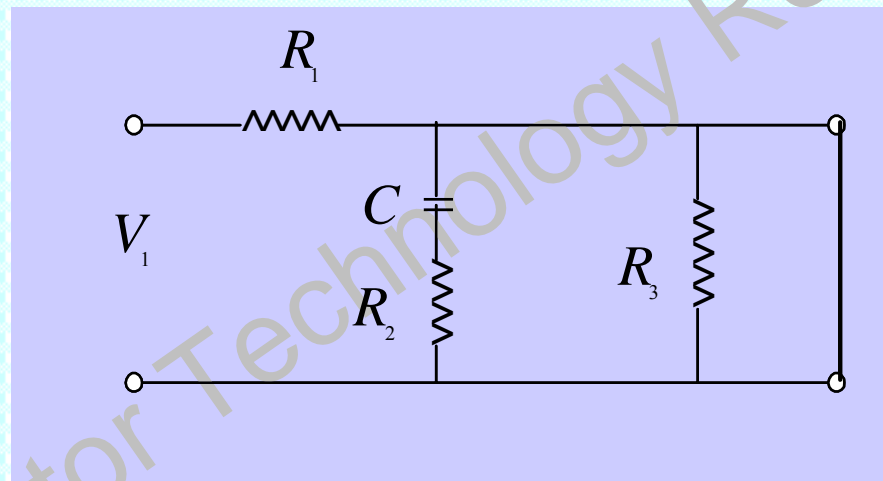


而 τ_p 即為此電路的時間常數：

$$\tau_p = (R_2 + R_1 // R_2) C$$

(3) 求 τ_z 值：令轉移函數之分子為零

亦即 $V_2 = 0$ ，也就是說將 V_2 兩端短路在一起
因此此時原來的電路圖變為：

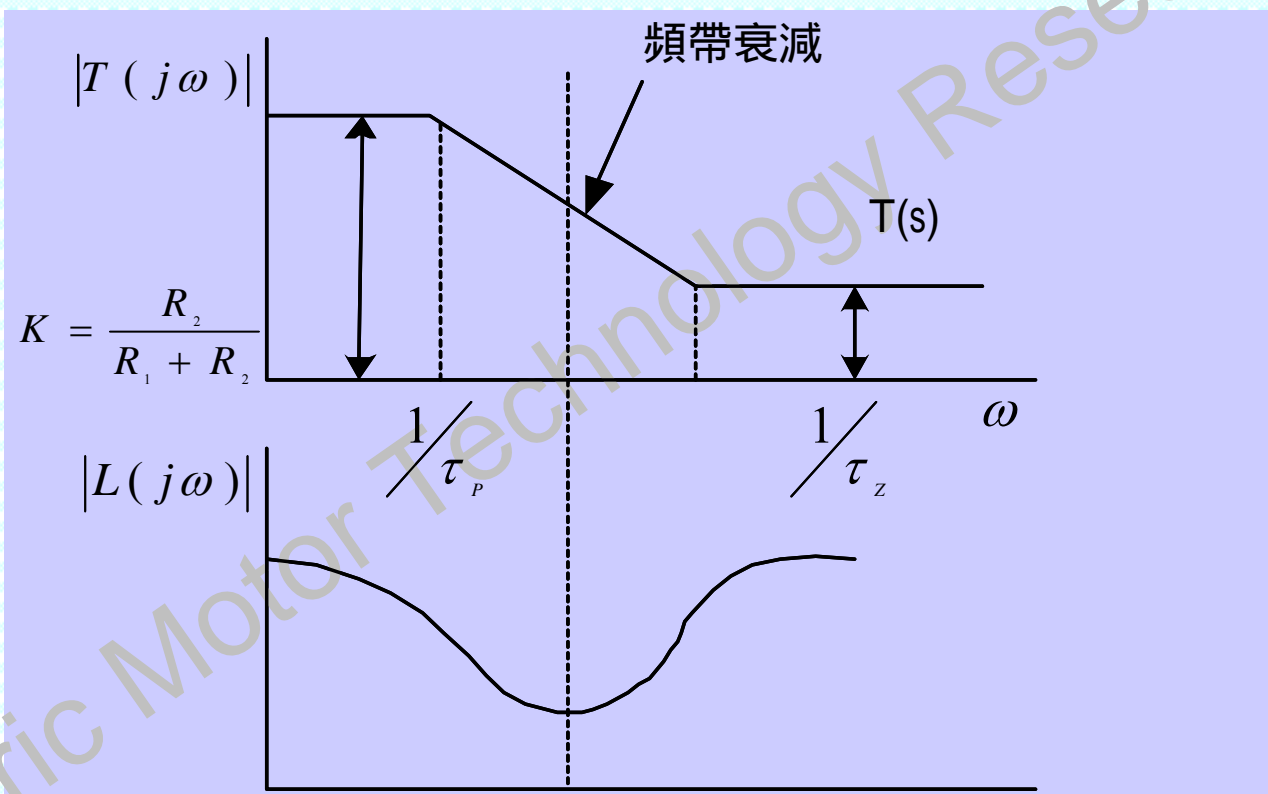


而 τ_z 即為此電路的時間常數：

$$\tau_z = R_3 C$$

$$\therefore T(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} \cdot \frac{R_2Cs + 1}{((R_2 + (R_1 // R_3))C)s + 1}$$

頻域特性:



- 相位落後補償器（Phase Lag Compensation）增加 Gain Margin, 使得原系統的增益交越頻率降低, 因而頻寬高度也跟著減少, 這使得系統的暫態反應速度較差
- 相位落後補償器類似於一低通濾波器, 所以進入到控制器的高頻雜訊容易被過濾掉, 所以系統有抑制雜訊的功用
- 有改善的穩態誤差效果

相位領先補償器 (Phase Lead Compensator)

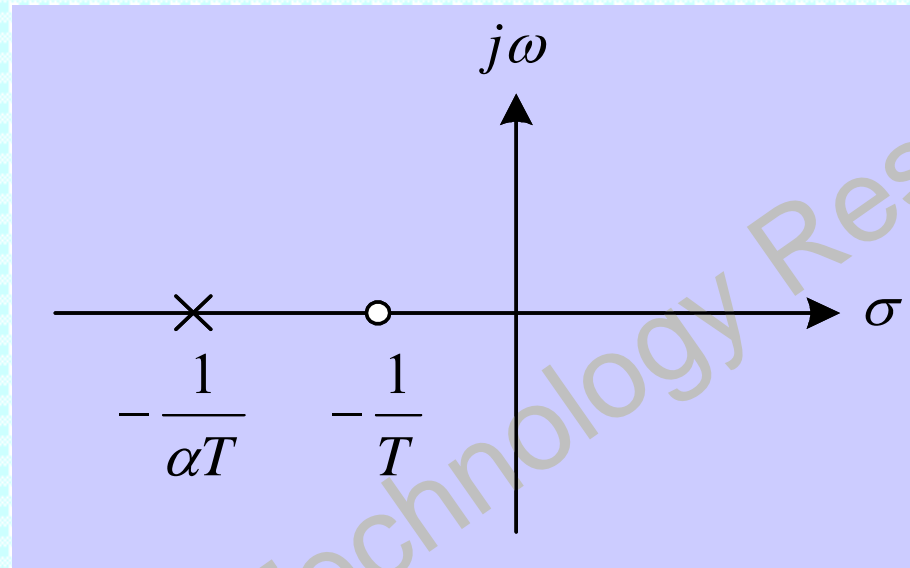
從頻域響應的觀點：

相位領先是指正弦輸出訊號的相位領先正弦輸入訊號。

相位領先補償器的轉移函數可模式化為

$$G_c(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \Rightarrow \alpha < 1$$

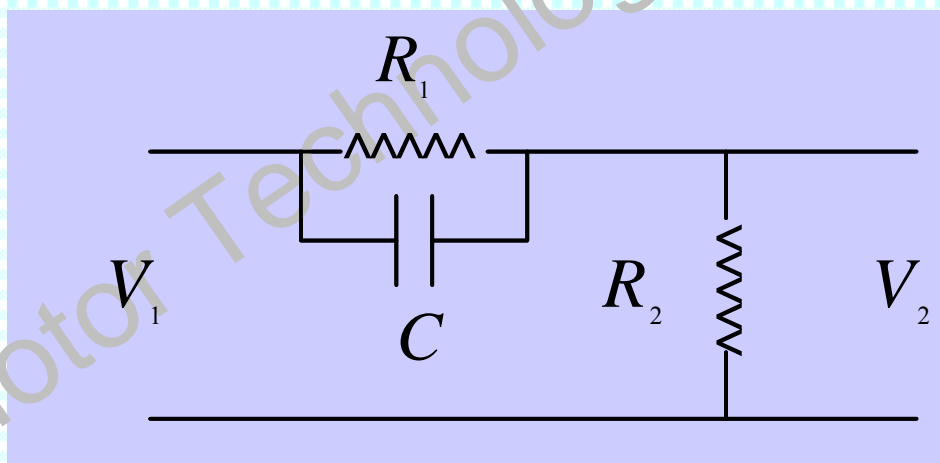
相位領先補償器的極零點分佈圖：



由上圖的S平面中可發現：因 $\alpha < 1$ ，所以零點 (Zero)永遠位於極點(Pole)的右邊，而其間的距離由常數 α 來決定。

零點在極點的右邊可使相位超前控制器改善閉迴路系統的穩定度

一常見的相位領先補償器的RC電路如下：



轉移函數形式:

$$T(s) = \frac{V_2}{V_1} = k \frac{\tau_z s + 1}{\tau_p s + 1}$$

1. 求k值：令 $s \rightarrow 0$

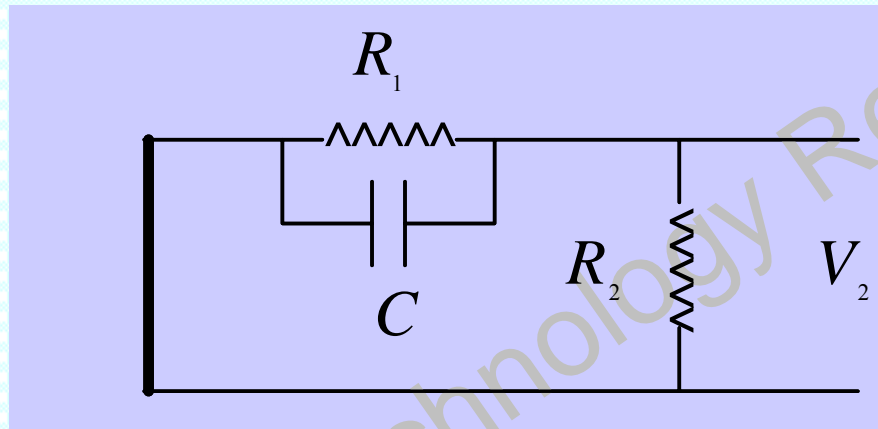
$$T(s) \Big|_{s \rightarrow 0} = k$$

由於 $s \rightarrow 0$ 時表示電容阻抗為無窮大,因此電容相當於斷路, 所以由電路圖可看出此時輸入輸出的比值為:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_3} \Rightarrow \therefore k = \frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

2. 求 τ_p 值：令轉移函數之分母為零

亦即 $V_1 = 0$ ，也就是說將 V_1 兩端短路在一起
因此此時原來的電路圖變為：

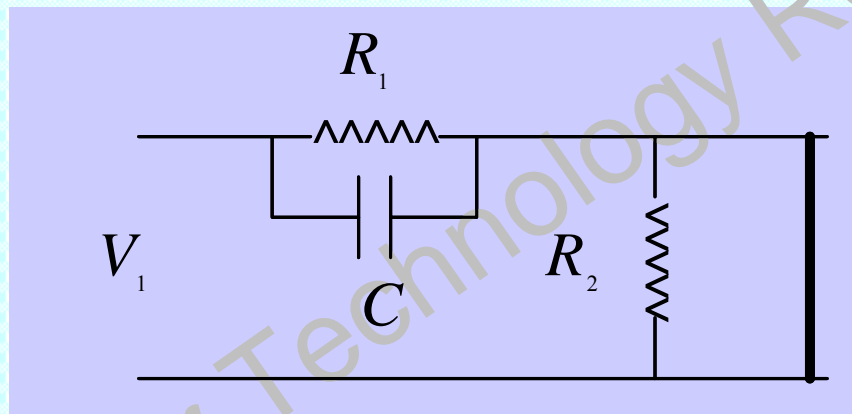


而 τ_p 即為此電路的時間常數：

$$\tau_p = C(R_1 // R_2) = C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

3. 求 τ_z 值：令轉移函數之分子為零

亦即 $V_2 = 0$ ，也就是說將 V_2 兩端短路在一起
因此此時原來的電路圖變為：

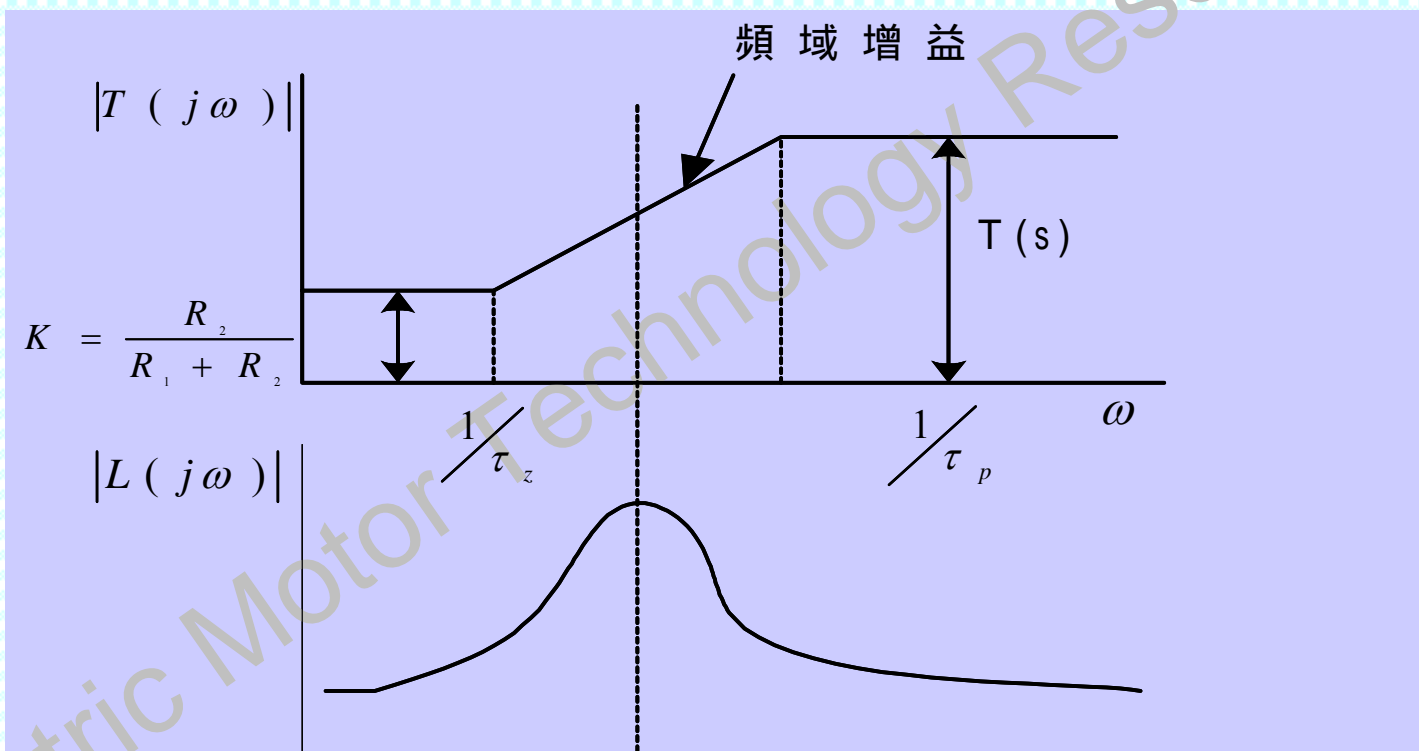


而 τ_z 即為此電路的時間常數：

$$\therefore \tau_z = R_1 C$$

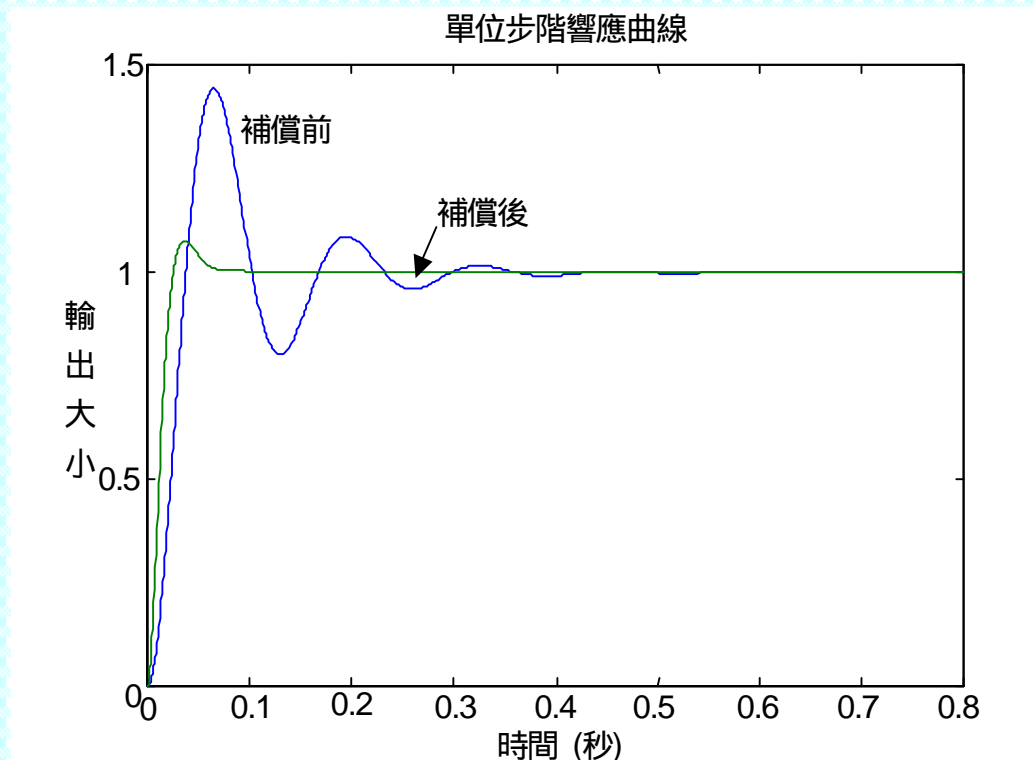
$$\therefore T(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1 C s + 1}{\left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) s + 1}$$

其頻域特性:



- 相位領先補償器（Phase Lead Compensation）由於它增大了系統的頻寬，使得閉迴路系統頻寬也變大，進而提高了系統的反應速度
- 在頻域上類似一個高通濾波器，此時若系統出現高頻雜訊或干擾時，將不利於雜訊抑制，而會影響系統的控制性能即會放大雜訊。
- 改善了系統時域的暫態響應與過高的最大超越量。
- 因高頻部份的補償器大小值為 $20\log\frac{1}{\alpha}$ ， α 值愈小則補償器大小值愈大，對有雜訊系統愈不好。一般 α 值選擇 0.07 $\alpha < 1$ 。

補償前後閉迴路系統作單位步階響應的比較結果：



補償後可降低最大超越量(%)以及縮短安定時間，即加速系統響應時間。

相位領先補償器的補償方式

(一)基於**頻率響應法**的領先補償方法

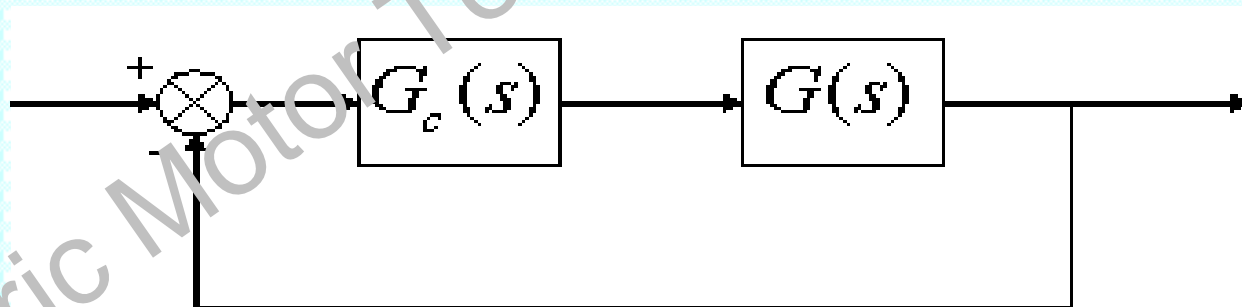
針對**頻域規格**的改善

(二)基於**根軌跡法**的領先補償方法

針對**時域規格**的改善

(一) 基於頻率響應法的領先補償方法

- 領先補償裝置的主要作用，是改變頻率響應曲線的形狀，產生足夠大的相位超前角，以補償原來系統中元件造成的過大的相位落後。
- 考慮如下圖所示的系統。假設性能指標是以相位邊限、增益邊限、穩態速度誤差常數等形式給出。於是利用頻率響應法設計領先補償裝置的步驟可以敘述如下：



設計領先補償裝置的步驟

1. 假設領先補償裝置： $G_c(s) = K_c a \frac{Ts+1}{aTs+1} = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{aT}}$ ($0 < a < 1$)

定義 $K_c a = K$ ($0 < a < 1$)

於是 $G_c(s) = K \frac{Ts+1}{aTs+1}$

校正系統的開迴路轉移函數為

$$G_c(s)G(s) = K \frac{Ts+1}{aTs+1} G(s) = \frac{Ts+1}{aTs+1} KG(s) = \frac{Ts+1}{aTs+1} G_1(s)$$

式中 $G_1(s) = KG(s)$

確定增益 K 使其滿足對給定穩態誤差常數的要求。

設計領先補償裝置的步驟

2. 利用已確定的增益 K ，畫出增益已經調整但尚未補償的系統的Bode圖。求出相位邊限。
3. 確定系統上需要增加的相位超前角。
4. 利用方程式 $\sin \phi_m = \frac{1-a}{1+a}$ ，確定衰減因子 a 。確定未校正系統 $G_1(j\omega)$ 的幅值等於 $-20\log(1/\sqrt{a})$ 時的頻率。選擇這個頻率作為新的增益交界頻率。這個頻率相應於 $\omega_m = 1/(\sqrt{a}T)$ ，並且最大相移 ϕ_m 就發生在這個頻率上。

設計領先補償裝置的步驟

5. 領先補償裝置的轉角頻率確定如下：

領先補償裝置的零點： $\omega = \frac{1}{T}$

領先補償裝置的極點： $\omega = \frac{1}{aT}$

6. 利用在第1步中確定的 K 值和在第4步中確定 a 的值，由下式計算常數 K_c ： $K_c = \frac{K}{a}$

7. 檢查增益邊限，確定是否滿足要求。如果不滿足要求透過改變補償裝置的極-零點位置，重複進行上述設計過程，直到獲得滿意的結果為止。

(二)基於根軌跡法的領先補償方法：

- 使用時機：

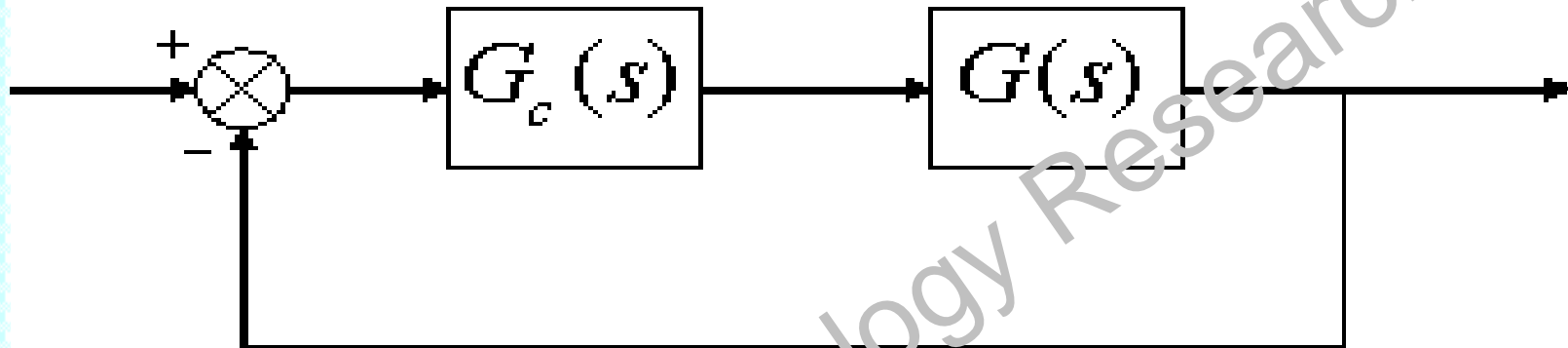
性能指標以時域量值訂定

如給定希望的主導閉迴路極點的阻尼比和無阻尼自然頻率、最大過衝量、上升時間和到達穩定時間，則採用根軌跡法進行設計是很有效的。

基於根軌跡法的領先補償方法：

- **問題**：在一個設計問題中，原系統不穩定，或者雖屬穩定，但具有不理想的暫態響應特性
- **解決方法**：在軸和原點附近，對於根軌跡進行修改，使閉迴路主導極點位於複數平面希望的位置上。這個問題，可以通過在前向(forward)轉移函數中，串聯一個適當的領先補償裝置來解決。

設計領先補償裝置的步驟 :



1. 根據性能指標，確定閉迴路主導極點的希望位置。
2. 通過畫根軌跡圖，確定只調整增益時，是否能產生希望的閉迴路極點。如果不能，計算出角度缺額。對於閉迴路主導極點，如果新的根軌跡透過希望的位置，則這個角度必須由領先補償裝置產生。

設計領先補償裝置的步驟：

3. 假設領先補償裝置為 $G_c(s) = K_c a \frac{Ts+1}{aTs+1} = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{aT}} (0 < a < 1)$ (0 < a < 1)

式中a和T由角度缺額確定。Kc由開迴路增益要求確定。

4. 如果穩態誤差常數不是規定值，則可以確定領先補償裝置的極點和零點位置，使領先補償裝置產生必要的角度。如果沒有其他的要求施加於系統則可試探的將值選取的儘可能大。(如果具體的穩態誤差常數是規定的值，則採用頻率響應法通常比他簡單)

設計領先補償裝置的步驟 :

5. 由幅值條件，確定補償系統的開迴路增益。

一但設計出補償裝置，就要檢查是不是所有的性能指標都得到了滿足。如果已補償的校正系統不滿足性能指標，則需要通過調整補償裝置的極點和零點，重複進行上述設計過程，直到滿足所有的性能指標為止。如果需要大的穩態誤差常數，則應串聯一個落後網路，即將領先補償裝置改變成一個落後-領先補償網路。

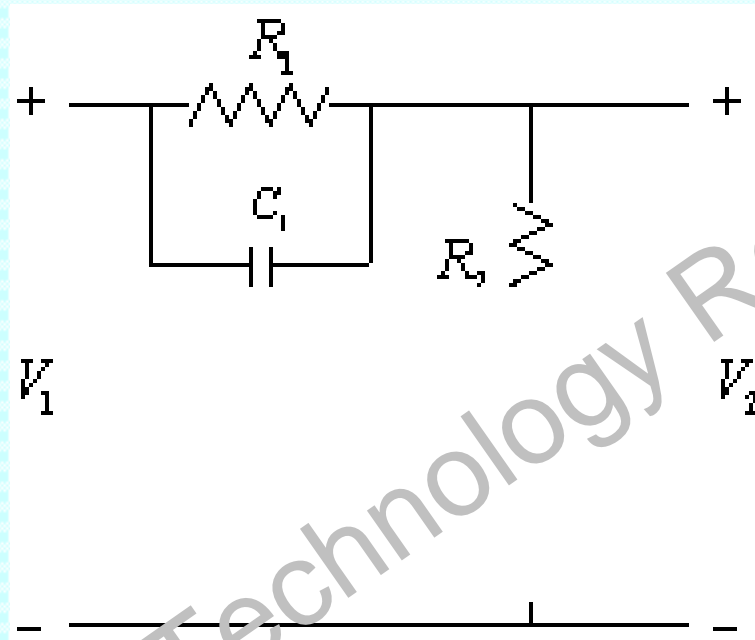
相位落後-領先補償器 (Lag-Lead Compensator)

- 相位領先補償器通常可以改善上升時間和阻尼，而會增加閉迴路系統的自然頻率。另一方面，當適當的應用相位落後控制，可改善超越量和相對穩定度，但通常導致較長的上升時間。需要時，會利用領先和落後控制器的組合。
- 簡單的落後-領先控制器的轉移函數可寫為

$$G_c(s) = \left(\frac{1+aT_1s}{1+T_1s} \right) \left(\frac{1+bT_2s}{1+T_2s} \right) \Rightarrow a > 1 \quad b < 1$$

若系統中有適當的迴路增益以補償此缺失，則相位領先控制器的衰減因子不包括此方程式內

落後-領先特性的網路



網路的轉移函數為

$$G_c(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)}{1 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) s + R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$$

範例：原系統的開迴路轉移函數

$$G_p = \frac{K}{s(1+0.1s)(1+0.2s)} \quad K_v = 100s^{-1} \quad \xi = 0.707$$

以落後補償器補償後的開迴路轉移函數為

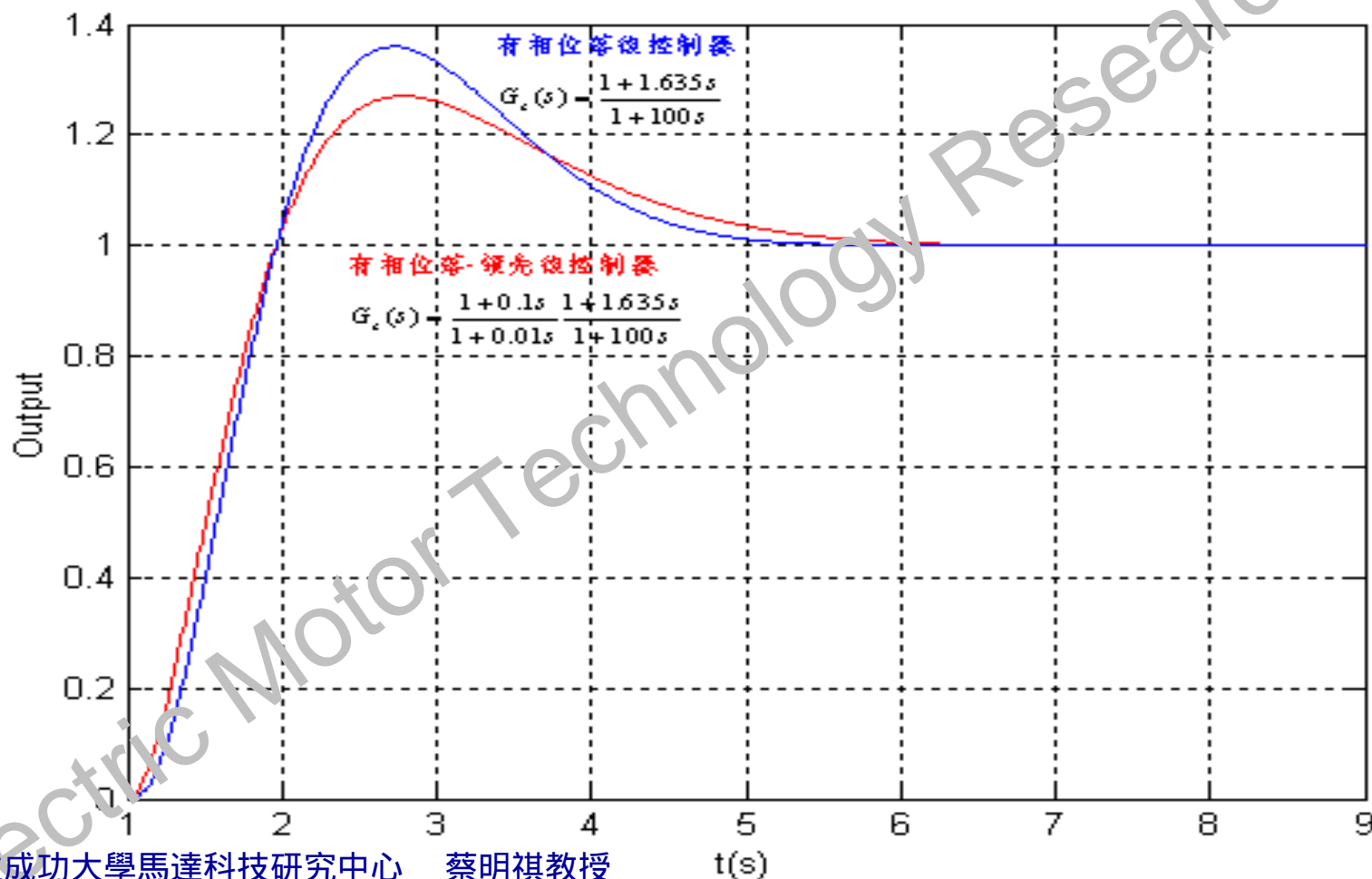
$$G_p = \frac{1.63K(s+0.6135)}{s(s+5)(s+10)(s+0.01)}$$

其中K=100，此響應的峰值超越量大約為35%

以落後-領先補償器補償後的開迴路轉移函數為

$$G_p = \frac{1630(s+0.6135)(s+10)}{s(s+5)(s+10)(s+0.01)(s+100)}$$

下圖為兩種補償後之單位步階響應圖，顯然，此系統現已改善了上升時間和超越量，遠優於相位落後控制器的系統



相位落後與相位領先之綜合比較

	相位領先	相位落後
方法	在交越頻率附近加入相位領先角或在s平面上產生所期望的支配根。	保持s平面上所需支配根或是Bode圖上相位餘裕不變，而加入相位落後以增加誤差常數。
結果	<ol style="list-style-type: none"> 1.增加系統頻寬。 2.增加高頻率處的增益。 	降低系統頻寬。
優點	<ol style="list-style-type: none"> 1.產生所需的反應。 2.加速動態反應。 	壓制高頻的雜訊。 降低穩態誤差。
缺點	<ol style="list-style-type: none"> 1.需要額外的放大器增益。 2.增加頻寬因此易受雜訊影響。 3.可能需要很大的RC電路元件值。 	<ol style="list-style-type: none"> 1.降低暫態反應的速度。 2.可能需要很大的RC電路元件值。
應用	當需要快速的暫態反應時	當指定誤差常數時
不適用	在交越頻率附近，相位迅速減小時。	在低頻處沒有相位等於所需相位餘裕時。

結論

- 相位領先補償器適用於不滿意暫態響應的系統，但對穩態響應所提供的改善極為有限
- 如果穩態行為極差，則不適用領先補償器
- 相位領先補償器增加了在增益交越頻率(gain crossover frequency)附近開迴路轉移函數的相位，通常也同時改善了相位邊界(phase margin)

- 若系統有滿意的暫態響應但其穩態響應不滿意，則利用落後補償器將是較佳選擇
- 加入落後補償器會使得增益交越頻率(gain crossover frequency)減小，因此頻寬也會減少
- 若暫態和穩態皆非常的不滿意，此時可直接結合兩者形成“落後—領先補償器”