伺服控制

第三章
PID控制原理與應用

國立成功大學馬達科技研究中心　蔡明祺教授
NCKU Electric Motor Technology Research Center

綱要

- 一. PID控制器
- 二. Kp和Kd的推導
- 三. Kp，Ki，Kd參數對系統的影響
- 四. 理論上的Kp，Ki，Kd效果
- 五. PD控制器
- 六. PI控制器
- 七. 如何調整PID控制參數(Tuning)
  -PID調變法則

PID控制器

- PID控制器又稱為三項(three terms)控制器或稱程序(Process)控制器.
- 有P – Proportional-比例項
  I – Integral-積分項
  D – Derivative-微分項 .
- 特別有利在降低穩態誤差和提升系統的暫態響應

- PID控制器是目前工業程序控制中應用最廣泛的工業控制器之一 .
  其轉移函數為:

$$G_c(s) = K_P + K_I/s + K_D s$$

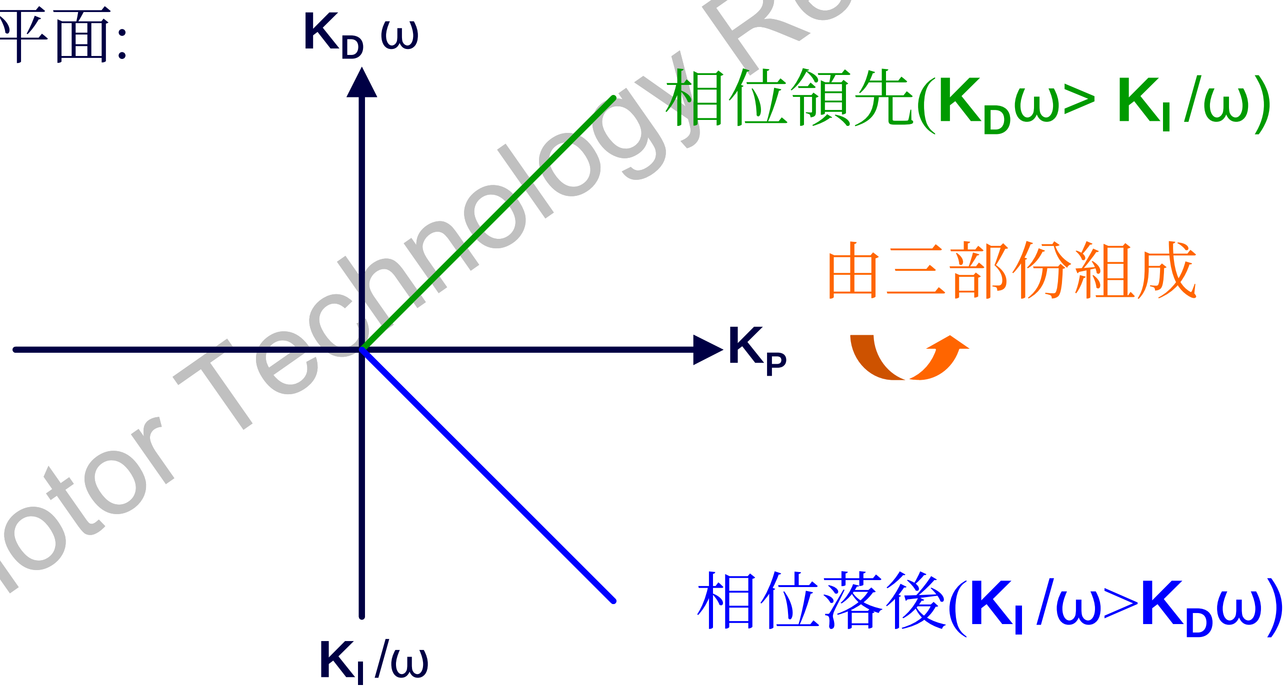
K_P 為比例增益常數;
K_I 為積分增益常數;
K_D 為微分增益常數 .

- 若我們設定K_D=0此控制器即為積分型(PI)控制器,若我們設定K_I=0此控制器即為微分型(PD)控制器

將s=jω代入PID控制器之轉移函數:

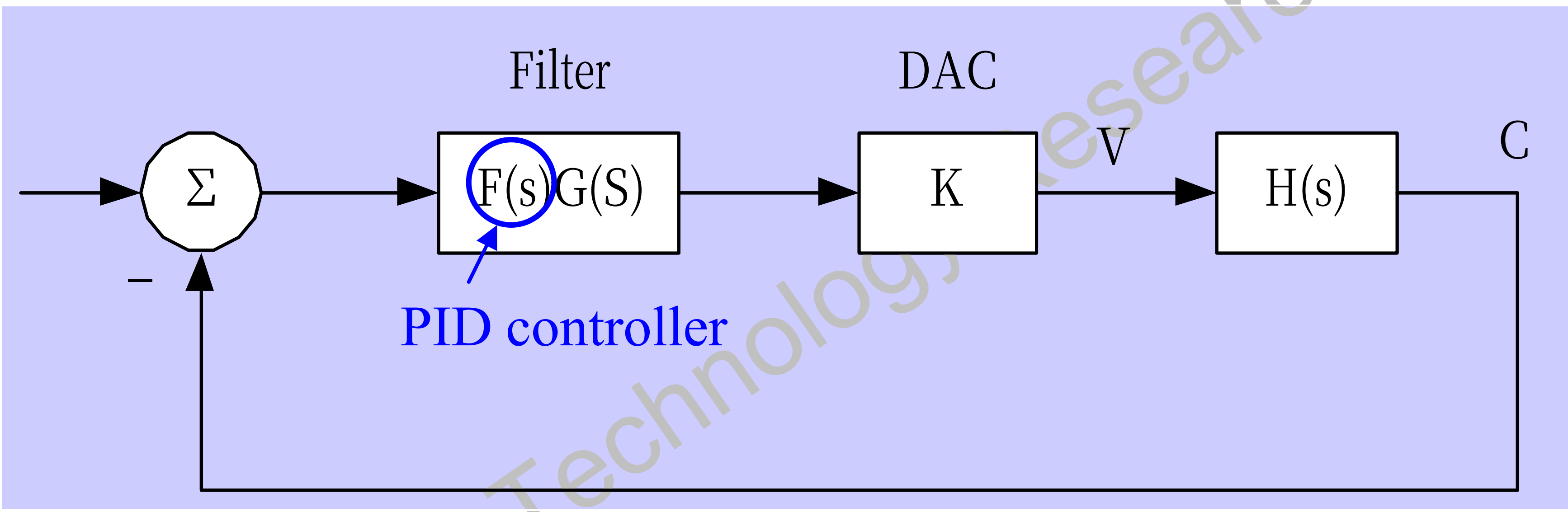
$$G_c(s) = K_P + K_I/s + K_D s$$
$$G_c(s) = K_P + K_I/j\omega + K_D j\omega$$

從複數平面:



由三部份組成

Kp和Kd的推導



- 此方塊圖為一簡單的控制系統，首先，我們先求出系統的L(s)，其中F(s)為一PID控制器，至於G(s)=即是延遲時間因子，而K和H(s)分別為DC gain以及系統plant。

$$F(s) = P + sD + \frac{I}{s}$$

$$G(s) = e^{-s\frac{T}{2}}$$

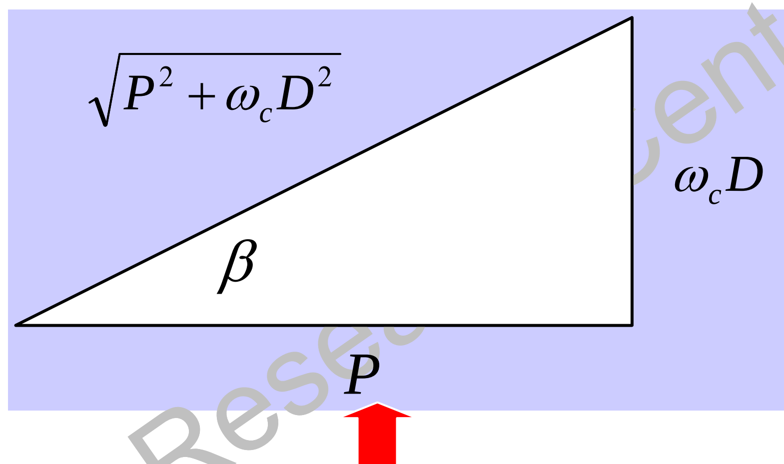
S=j ω_c代入

$$L(s) = (P + sD + \frac{I}{s})e^{-sT/2}KH(s)$$

$$|G(s)| = \left|e^{-sT/2}\right| = 1$$

$$\left|(P + j\omega_c D)KH(j\omega_c)\right| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |L(j\,\omega_c)|=1$$

$$\sqrt{P^2 + \omega_c D^2}\,K\left|H(j\omega_c)\right| = 1$$



給定ω_c-Gain cross over frequency

P_m-Phase margin(β-相位)

$$A = \left| H(j\omega_c) \right|$$

$$\sqrt{P^2 + \omega_c^{\,2} D^2}\, KA = 1$$

$$P \sec \beta = \frac{1}{KA}$$

$$\omega_c D \csc \beta = \frac{1}{AK}$$

$$P = \frac{1}{AK} \cos \beta$$

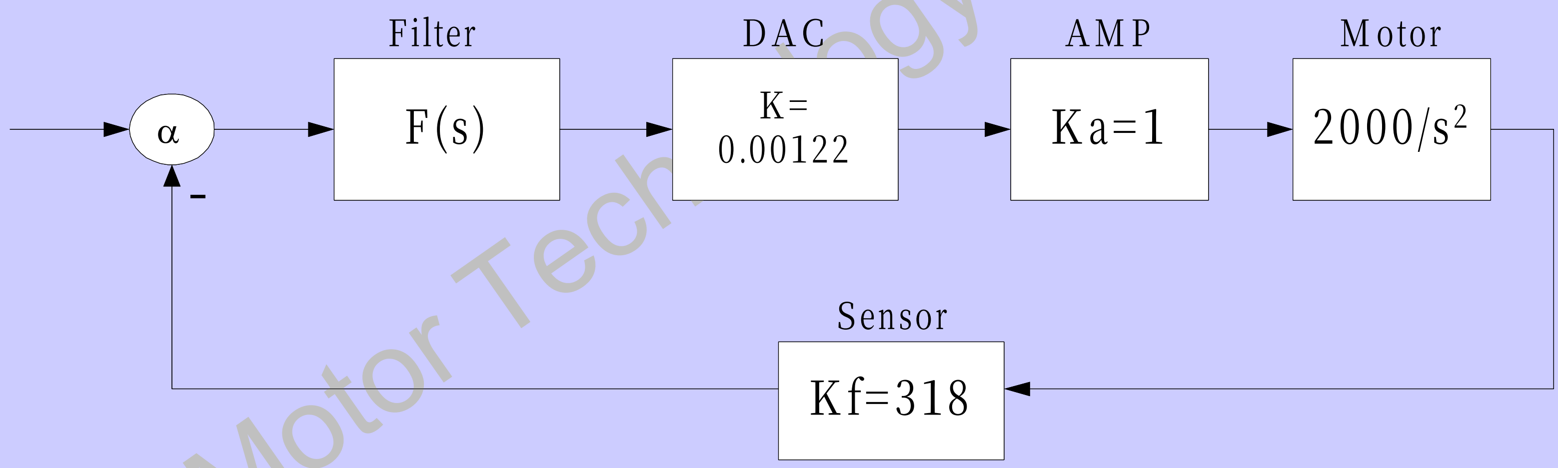
$$D = \frac{1}{\omega_c AK} \sin \beta$$

$$Arg\,[P + j\omega_c D] = \tan^{-1} \frac{\omega_c D}{P} = \beta$$

- 這裡求出的P、D係數是依據step by step的方式求得，配合上頁的圖示，相信Kp和Kd的推導是沒有問題的。
- 至於Ki的部分，曾經作過許多嚐試，但是總是有一個關鍵步驟無法突破，因此在這很遺憾不能作詳盡的說明。

Kp，Ki，Kd參數對系統的影響

- 我們以一個例題來說明，此例題的目標在設計一個 $Wc = 200rad/s$ 及 $\theta_m = 45°$ 系統的PID控制器。



Mathematical Model of the Control System

$$H(s) = \frac{KaKtKf}{Js^2} = \frac{6.36 * 10^5}{s^2}$$

$$H(j200) = \frac{6.36 * 10^5}{(j200)^2} = -15.9$$

$$A = 15.9$$

$$\alpha = Arg\left[H(jw)\right] = -180$$

$$\beta = \theta_m - 175° - \alpha + \frac{180WcT}{2\pi} = 56°$$

$$\theta_m = 180° + Arg\left[H(jWc)\right] + \tan^{-1}\frac{WcD}{P} - \frac{180WcT}{2\pi} - 5°$$

- 經由左邊的推導過程可得:

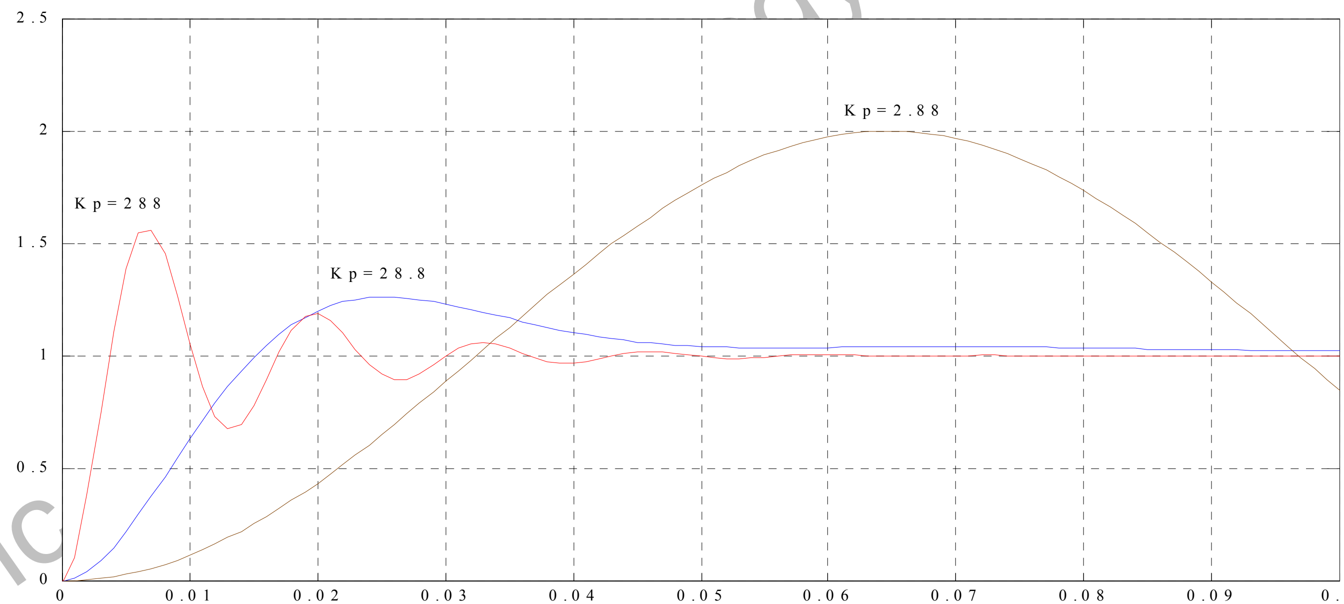
$$P = 51.5 \cos 56°$$

$$D = \frac{51.5}{200} \sin 56° = 0.213$$

$$I = 5760 \tan 5°$$

改變Kp對系統的影響

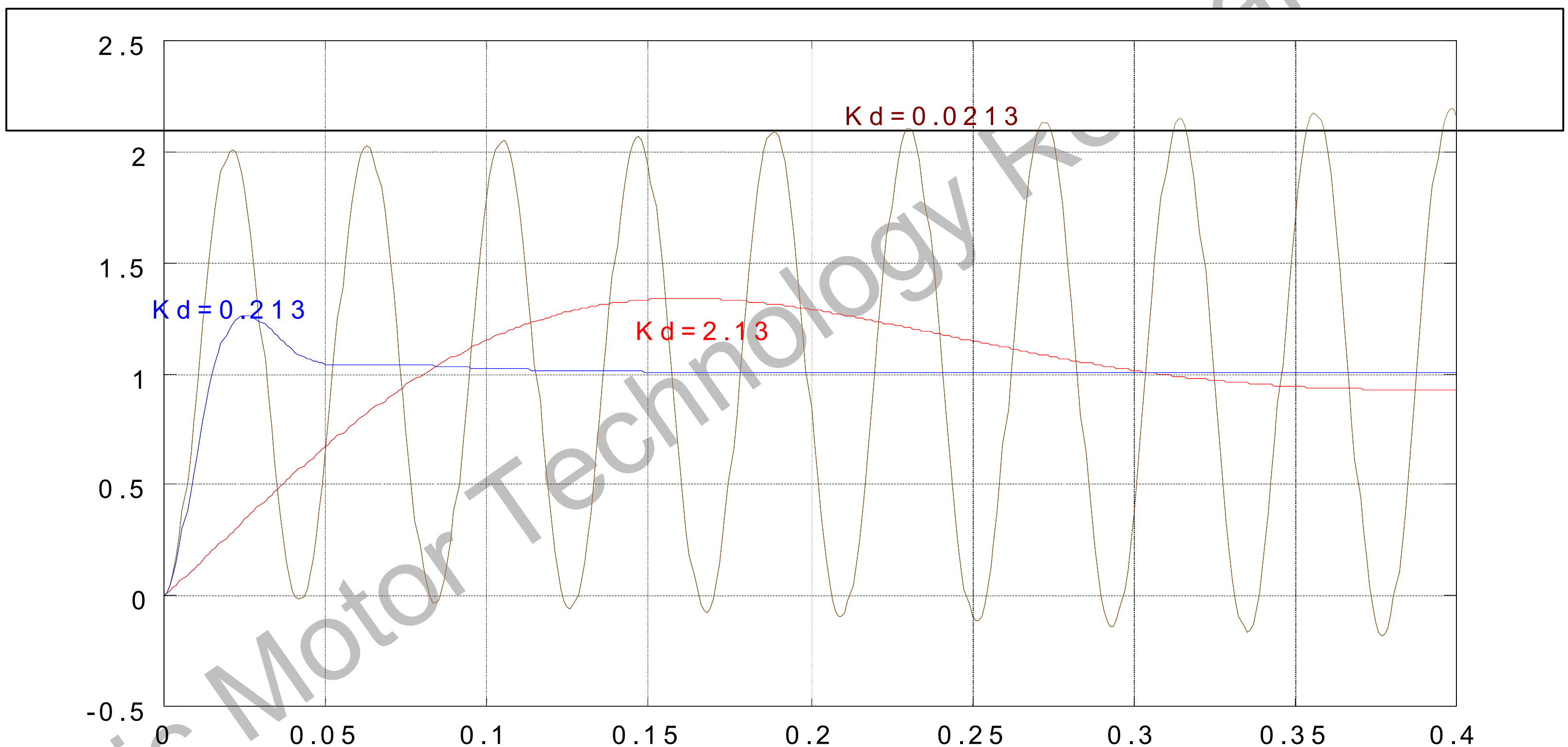
- 此圖形是利用step by step課本上的例題5-1的參考數據，然後使用Matlab作Simulink模擬所得到的圖形﹝藍色曲線﹞



調整Kp值之後我們發現:

- 放大10倍Kp的圖形有明顯的ripple現象。
- 它的延遲時間、起升時間、和抵達峰值的時間皆有明顯的簡短。
- 和縮小10倍的結果比起來，我們可以得知，加大Kp值可以加速系統響應速度，減低系統暫態的時間。

改變Kd對系統的影響

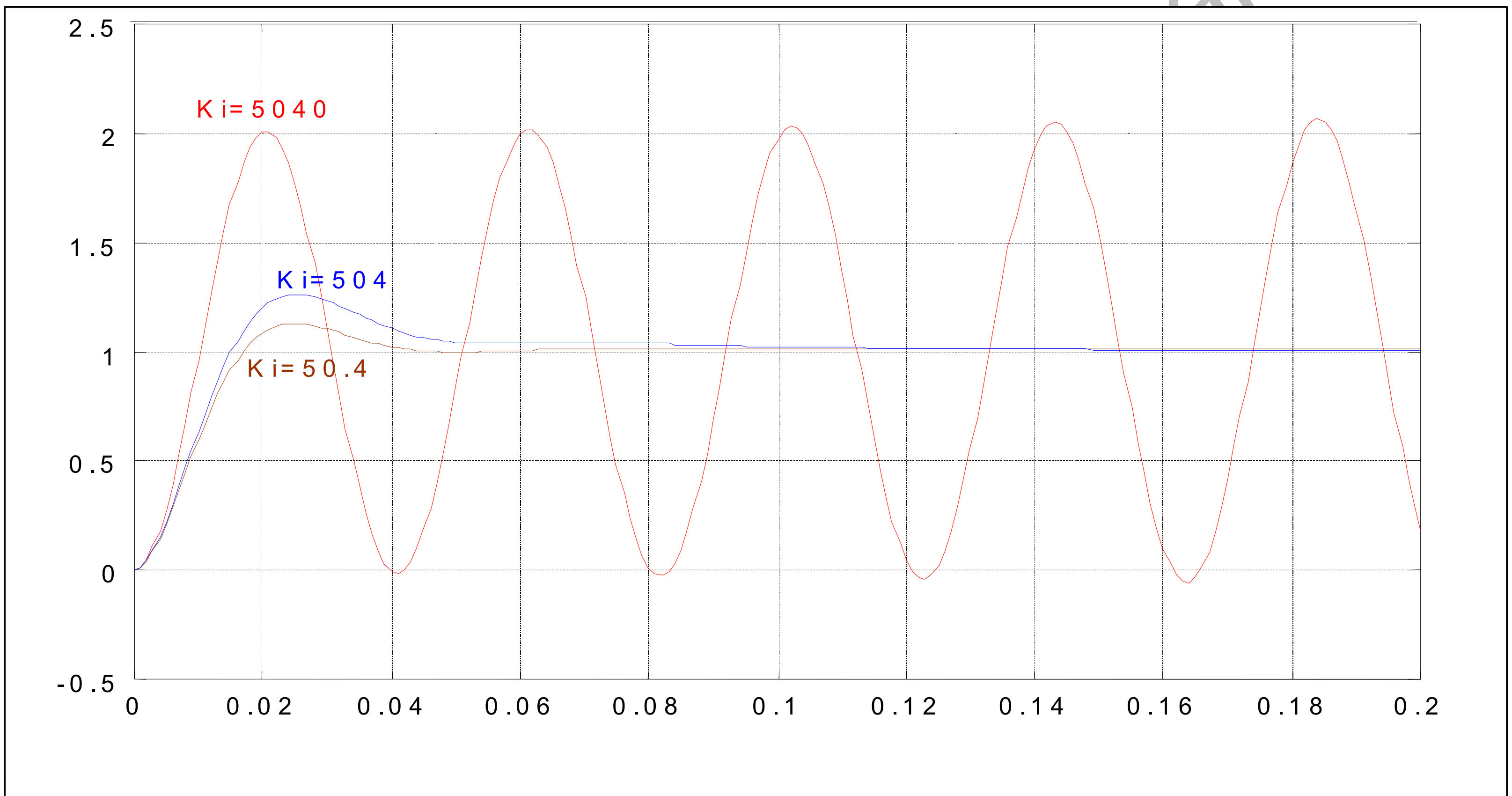


2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
Kd=0.0213
Kd=0.213
Kd=2.13

從上面的圖形顯示:

- 如果Kd值放大10倍﹝紅色曲線﹞，其延遲時間、起升時間、和抵達峰值的時間皆有明顯的延長，因此對系統的響應速度來說並不是一個好的情形。
- 至於縮小10倍的Kd圖形﹝褐色曲線﹞，我們發現它的超越量明顯過大，並隨著時間甚至有越來越大的趨勢，這將造成系統的發散，無法達到對系統所要求的穩態響應。

改變Ki對系統的影響

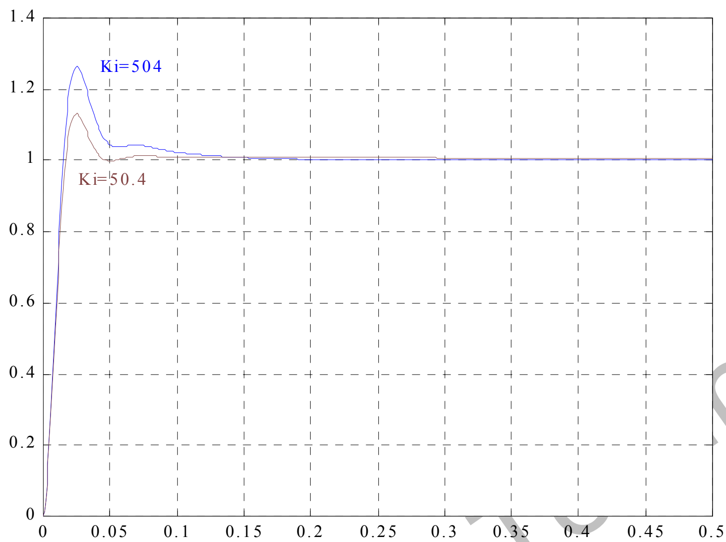


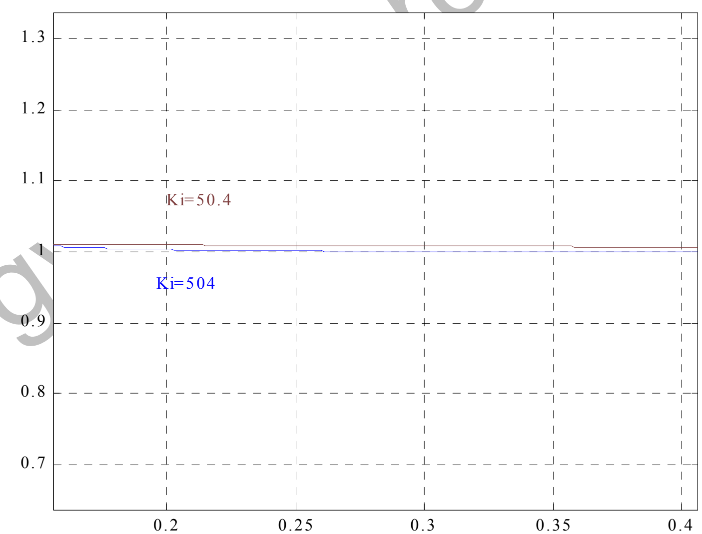
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
0.14
0.16
0.18
0.2
Ki=5040
Ki=504
Ki=50.4

由上圖看來:

- 在Ki值放大10倍之後〔紅色曲線〕，系統的超越量也是很嚴重，並且似乎有些微的發散現象。
- 至於縮小10倍後〔褐色曲線〕，系統超越量有減低的趨勢。

- 從這裡看來，似乎整體的反應以Ki值為50.4時較佳，但是若是將圖形的y軸間距調大一點來看，如下圖：





- 我們發現，實際上褐色曲線達到穩態要求的時間比原先的設計值還要久，因此考量上，我們仍舊將會選擇原本的設計值。

理論上的Kp，Ki，Kd效果

- 1. Kp：改變Kp值可以調整系統的相對穩定度及穩態誤差。通常Kp增大可以降低穩態誤差，但破壞相對穩定度；相反的，Kp值小可以改善相對穩定度，但卻會增加穩態誤差。

- 2. Kd：D控制器具有預期高超越量，並作修正的工作，使得超越量改善，微分這個動作主要是改善系統的阻尼特性及暫態響應，並增加相對穩定度。不過微分不利於高頻雜訊干擾且無法改善穩態誤差。
- 3. Ki：I控制器相當於一個記憶性的控制器，其對於瞬間的系統變化無法即時反應，但是若當系統的資料累積越多，其作用就越大，因此對穩態誤差有改善效果。不過積分動作卻也讓系統變的不穩定，即使系統仍維持穩定，暫態響應的性能﹝超越量、起昇時間﹞也會變差。

PD控制器

- PD控制器相當於在開迴路系統中加入一個非零的零點，加入零點可使根軌跡往左半平面移動。因此，PD控制器可以改善閉迴路系統的相對穩定度。
- 其轉移函數為:

$$G_c(s) = K_p + K_D S$$

- 以頻率的觀點來看PD控制器，它的行為在頻域上是一個高通濾波器(high pass filter)。
- 以時域觀點來看，PD控制器能改善過高的過超越量及適當的增加響應速度外，對改善穩態響應沒有幫助作用。

PI控制器

- PI控制器相當於在開迴路系統中加入一個非零的零點及一個極點S=0，由於加入的極點比加入的零點更接近虛軸，故會使系統變得更不穩定。
- 其轉移函數為:

$$Gc(s) = Kp + {Ki}/{s}$$

- 以頻率的觀點來看PI控制器，它的行為在頻域上是一個低通濾波器(low pass filter)，因此對系統內出現高頻雜訊或外在有高頻干擾源，有抑制作用。
- 因為在s=0加入一個極點,可增加開迴路轉移函數的階數一次,故可改善系統的穩態誤差。