伺服控制

The Z Domain (Digital)

授課老師:蔡明祺 教授

Z-Basic

- Why we need the Z domain?
- The Definition of Z
- Z Phase and Gain
- Analog and Digital(S and Z)
- Converting T(s) to T(z)

Why we need the Z domain?

- Describing and Analyzing the Performance of the Computer-Based System
- The core of most digital controllers can not process data continuously.
- Accounting for Sampling

The Definition of Z

- Based on the S Domain Delay Operation

- Most control algorithms process data that are either new or delayed an integer number of cycles.

- Transform pair

$$f(t) \Leftrightarrow F(s)$$

$$f(t\text{-}T) \Leftrightarrow e^{-st}F(s)$$

$$e^{-snT}F(s) \Leftrightarrow (e^{-sT})^{n}F(s).$$

$$z = e^{sT}$$

z – Domain Function

Operation	Implementation
Integration	$Tz/(z-1)$
Differentiation	$(z-1)/Tz$
Delay	$1/z$
Simple Filters	
Single-pole low-pass filter	$z(1-e^{-T/\tau})/(z- e^{-T/\tau})$
Compensators	
PI	$K_I Tz/(z-1) + K_P$
Lead	$1 + K_D(z-1)/Tz \bullet z(1-)/(z- e^{-T/\tau})$

Z Phase and Gain

- Transfer Function

$$\frac{C(z)}{R(z)} = T(z) = \frac{0.2391(z+1)}{z-0.5219}$$

- Where

$$z = e^{sT} \xrightarrow{s=j\omega} 1\angle + \omega T$$

- Sampling Time

$=> 0.001s$

Break Frequency

$=> 100Hz$

- T(z)

$$= 0.6952\angle -45.97^{\circ}$$

DC Gain

在s – domain上其DC gain是當s = 0時計算T(s)｜$_{s=0}$，因此由z的定義得當z=1時，轉移函數T(z)｜$_{z=1}$計算所得為其DC gain。

$$T(z)\Big|_{z=1} = \frac{0.2391(z+1)}{z-0.5219}\Bigg|_{z=1} = \frac{0.2391 \cdot 2.0}{1.0-0.5219} = 1.0$$

How to convert Transfer Function to Algorithm

- 在s–domain上的函數通常以電路來實現，而z–domain上的函數則常以電腦程式來運算實現，程式通常是在輸入取樣後重複處理每單一cycle，因此可以發展一運算法，此演算法根據新的輸入及前一cycle的輸入、輸出來計算新的輸出。

- 數位系統並非完整連續的函數，而是以離散的取樣如f(0)、f(T)…f(nT)，在此以f_0、f_1、…、f_n來代表它們。

Ex：一個取樣程序的運算步驟如下

$$T(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{0.2391(z+1)}{z-0.5219}$$

1. 將等號兩邊通分，使兩邊都沒有分母項。

$$C(z)\cdot(z-0.5219)=R(z)\cdot 0.2391(z+1)$$

2. 根據等號兩邊最大的z的權數，同除z即其權數，使其為1，如下所示：

$$C(z)\left(1-\frac{0.5219}{z}\right)=R(z)\cdot 0.2391\left(1+\frac{1}{z}\right)$$

或

$$C(z)-\frac{0.5219C(z)}{z}=0.2391\left(R(z)+\frac{R(z)}{z}\right)$$

3.將步驟 2.所得的式轉換回時域（time domain），此一步驟將會使在z – domain的1/z變成時域中取樣的延遲，假使等式中有$1/z^2$，則是代表在時域中延遲兩個cycle。在此C(z)轉換回C_n，而C(z)/z則轉換回C_{n-1}

$$C_n - 0.5219 \cdot C_{n-1} = 0.2391(R_n + R_{n-1})$$

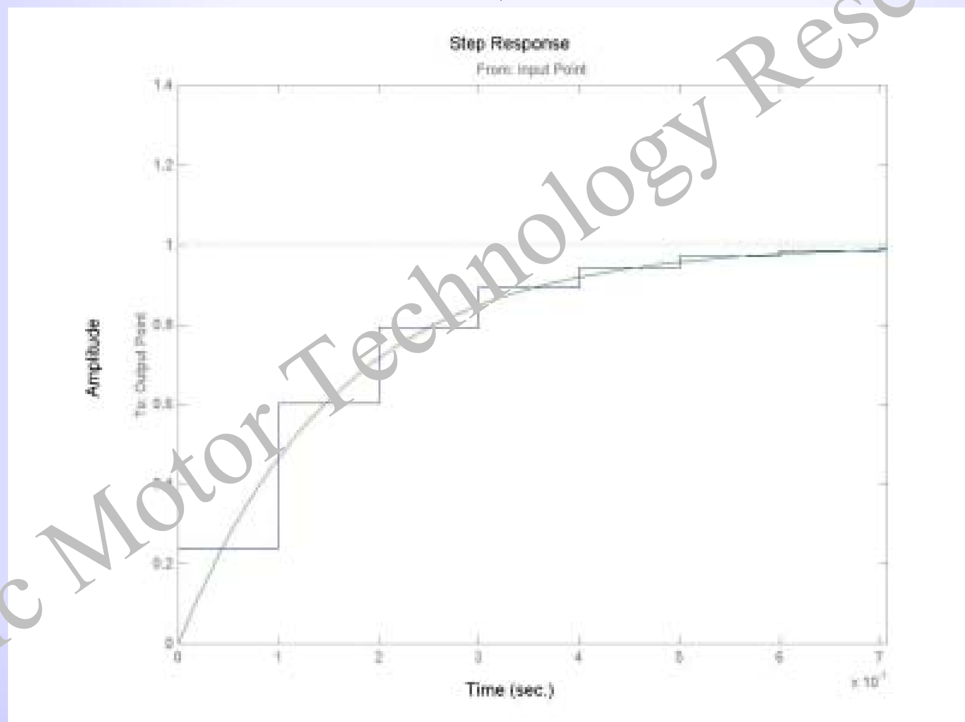
4.重寫等式，使新的輸出Cn為新的的表示式，

$$C_n = 0.5219 \cdot C_{n-1} + 0.2391(R_n + R_{n-1})$$

目前的輸出　前一次的輸出　目前的輸入　前一次的輸入

$$C_n = 0.5219 \cdot C_{n-1} + 0.2391(R_n + R_{n-1})$$

上式為一個遞迴式，一個cycle的輸出等於此一cycle的輸入Rn、前一cycle的輸入Rn-1及輸出Cn-1的和，這樣的一個等式可以很容易地撰寫電腦程式來模擬其在時域的響應，當然也可以很容易地在單晶片電腦上撰寫控制程式



數位的響應是量化的、取樣的，就是像走樓梯一般

Analog and Digital(S and Z)

- Transfer Function

S domain

$$T(s) = \frac{628.3}{s + 628.3}$$

- Transfer Function

Z domain

$$T(z) = \frac{0.2391(z+1)}{z - 0.5219}$$