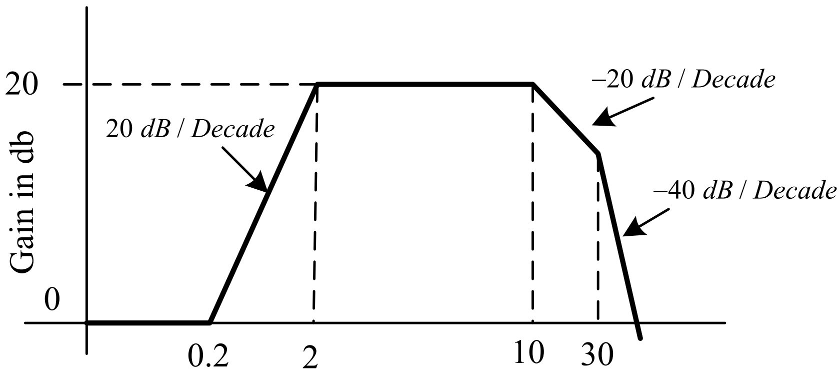
1. 考慮一極小相位系統其波德圖大小響應如下圖所示，試求該系統之轉移函數。



Sol.:

由波德大小響應圖可知，轉角頻率分別為 0.2、2、10 和 30 rad/sec，且低頻區之漸進線為水平線，故系統轉移函數為 $G(s)=\dfrac{\left(1+\dfrac{s}{0.2}\right)}{\left(1+\dfrac{s}{2}\right)\left(1+\dfrac{s}{10}\right)\left(1+\dfrac{s}{30}\right)}$

2. 考慮一系統轉移函數 $G(s)=\dfrac{1}{s^2+2s+1}$ ，當輸入為 $u(t)=2\sin\pi t$ 時，請問系統輸出之穩態響應為何?

Sol.:

若系統操作於工作頻率 ω 時，其系統轉移函數可表示為

$G(j\omega)=\dfrac{1}{\left(1-\omega^2\right)+2\omega j}$ 。

由題目可知 $u(t)=2\sin\pi t$ 時，即 $\omega=\pi$ ，可得 $G(j\pi)=\dfrac{1}{-8.87+j6.283}$ ，且

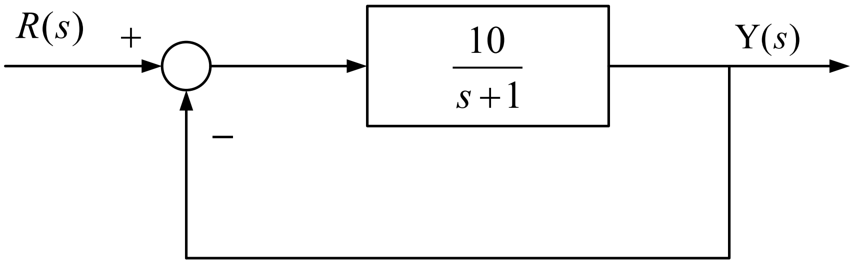
$\left|G(j\pi)\right|=0.092$, $\angle G(j\pi)=-144.69^\circ$

因此輸出穩態響應為 $2\times0.092\sin\left(\pi t-144.69^\circ\times\dfrac{\pi}{180^\circ}\right)=0.184(\pi t-2.53)$

3. 考慮一系統如下圖所示，假設

$r(t) = \sin(t + 60^\circ) - 2\cos(2t - 30^\circ)$

試求系統穩態輸出響應



Sol.:

首先求解整個閉迴路轉移函數為$T(s) = \dfrac{10}{s+11}$。利用線性系統的重疊定理，先考慮當$r(t) = \sin(t + 60^\circ)$時的穩態輸出響應。因為$T(j1) = \dfrac{10}{j1+11}$，所以

$$|T(j1)| = \frac{10}{\sqrt{122}}$$

$$\angle T(j1) = -\tan^{-1}\frac{1}{11} = -5.19^\circ$$

所以此時穩態輸出響應

$$y_{ss1}(t) = \frac{10}{\sqrt{122}}\sin(t + 60^\circ - 5.19^\circ) = \frac{10}{\sqrt{122}}\sin(t + 54.81^\circ)$$

接著考慮當$r(t) = -2\cos(2t - 30^\circ)$時的穩態輸出響應。因為$T(j2) = \dfrac{10}{j2+11}$，所以

$$|T(j2)| = \frac{10}{\sqrt{125}}$$

$$\angle T(j2) = -\tan^{-1}\frac{2}{11} = -10.3^\circ$$

所以此時穩態輸出響應

$$y_{ss2}(t) = -2 \times \frac{10}{\sqrt{125}}\cos(2t - 30^\circ - 10.3^\circ) = -\frac{20}{\sqrt{125}}\cos(2t - 40.3^\circ)$$

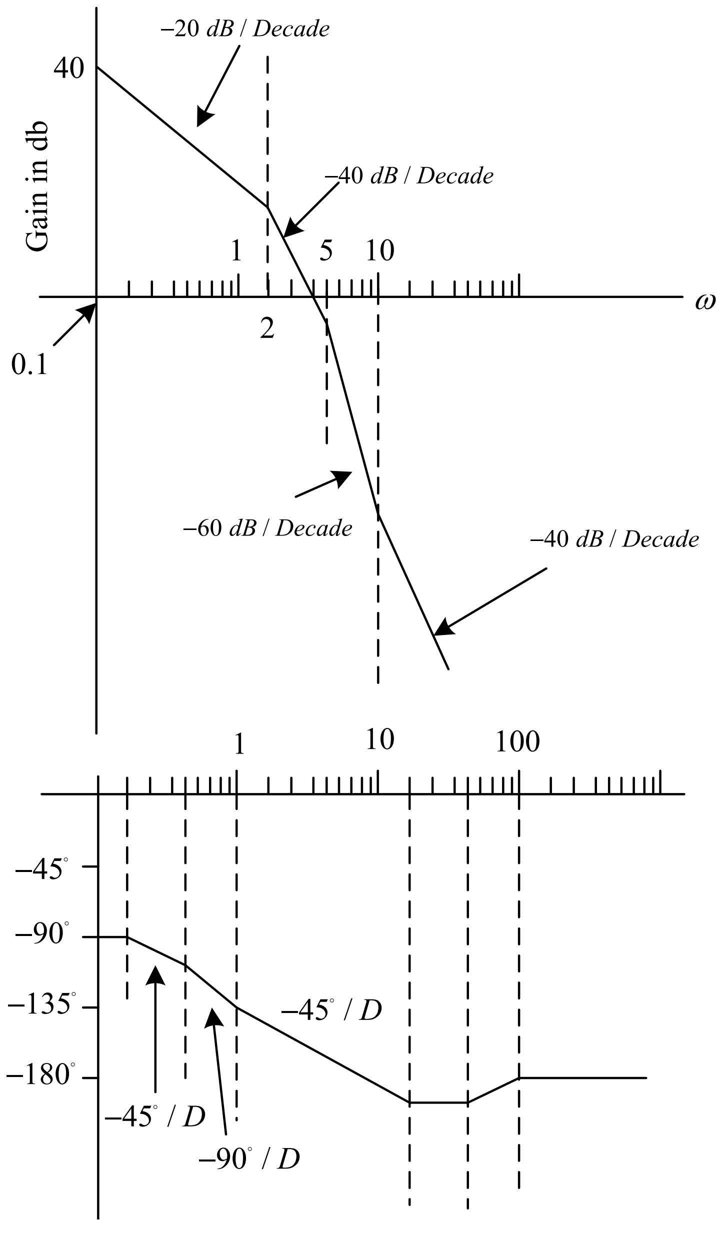
綜合以上兩者的結果，當$r(t) = \sin(t + 60^\circ) - 2\cos(2t - 30^\circ)$時，利用線性系統重疊原理的觀念，可以得到閉迴路系統的穩態輸出響應為

$$y_{ss}(t) = y_{ss1}(t) + y_{ss2}(t) = \frac{10}{\sqrt{122}}\sin(t + 54.81^\circ) - \frac{20}{\sqrt{125}}\cos(2t - 40.3^\circ)$$

4. 試求 $G(s)=\dfrac{10(s+10)}{s(s+2)(s+5)}$ **之近似波德圖**

Sol.:

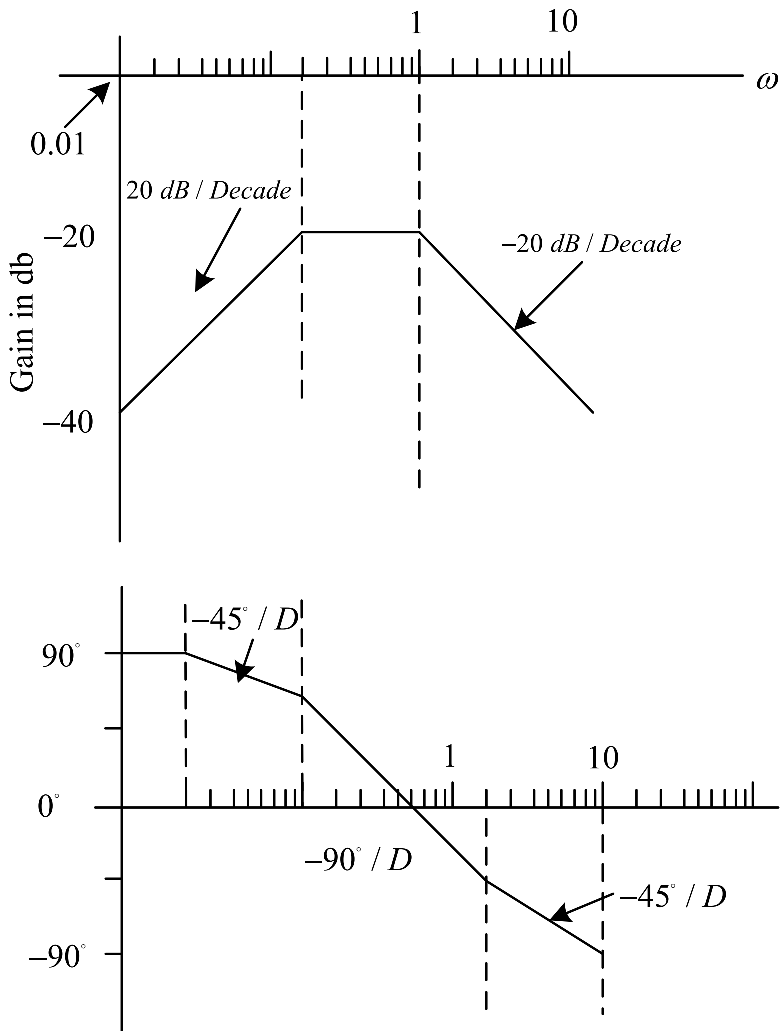
題目 $G(s)$ 的零點轉角頻率為 10 rad/sec、極點轉角頻率為 2 和 5 rad/sec，可求得其近似波德圖如下



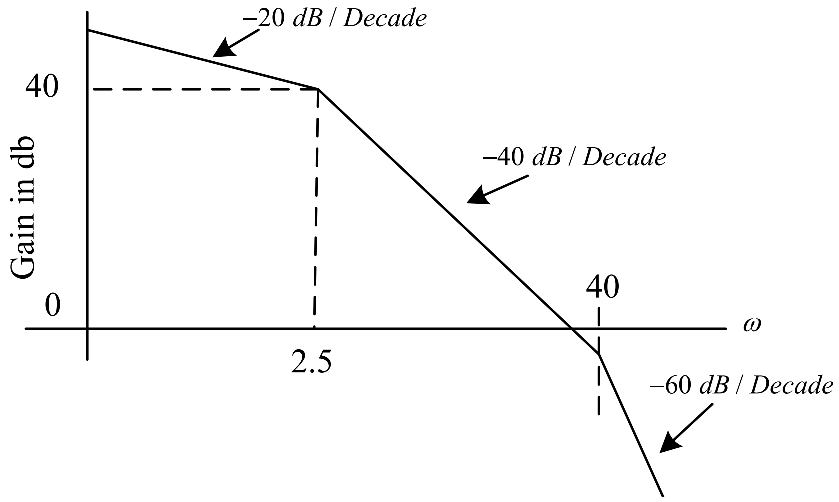
5. 試求$G(s)=\dfrac{s}{(s+1)(5s+1)}$的近似波德圖

Sol.

題目 $G(s)$ 的極點轉角頻率為 1 和 0.2 rad/sec，可求得其近似波德圖如下



6. 有一極小相位系統，其波德大小如下圖所示，請求出該系統之轉移函數。



Sol.:

由圖中之轉角頻率為 2.5 與 40 rad/sec，且低頻區之斜率為-20 dB/Decade，可得系統轉移函數為

$$G(s)=\frac{\mathrm{K}}{s\left(1+\frac{s}{2.5}\right)\left(1+\frac{s}{40}\right)}$$

求解 K 值時，可先省略$\left(1+\frac{s}{2.5}\right)\left(1+\frac{s}{40}\right)$的因式，因此令$G^{*}(s)=\frac{K}{s}$，則$G^{*}(s)$

的波德圖可視為原$G(s)$波德圖之延伸。在低頻區之延伸線上可得

$\omega=2.5\ rad/\sec$時，波德大小值為 40dB，所以

$$20\log\left|\frac{K}{j2.5}\right|=40 \Rightarrow K=250$$

7. 若一單位迴授控制系統之開迴路轉移函數為$e^{-Ts}\cdot G(s)=e^{-Ts}\cdot\frac{\sqrt{5}}{s(s+2)}$**，試求**

閉迴路系統穩定之最大允許延遲時間 T (sec)。 $Hint:\tan^{-1}\frac{1}{2}=26.565$

Sol.:

求增益交越頻率ω_g

$$\left|G(j\omega_g e^{-j\omega_g T})\right|=\left|G(j\omega_g)\right|=\frac{\sqrt{5}}{\omega_g\sqrt{4+\omega_g^{\ 2}}}=1$$

$$\Rightarrow \omega_g^{\ 4}+4\omega_g^{\ 2}-5=0$$

解得 $\omega_g = 1\ rad/\sec$

若要求閉迴路系統穩定，則相位邊限 P.M.必須大於零，亦即

$$P.M. = 180° + \angle G(j\omega_g)e^{-j\omega_g T} = 180° - 90° - \tan^{-1}\frac{1}{2} - 1 \cdot T \cdot \frac{180°}{\pi} > 0°$$

$\Rightarrow T < 1.107\sec$

因此，最大可容許的 T 值為 1.107 sec。