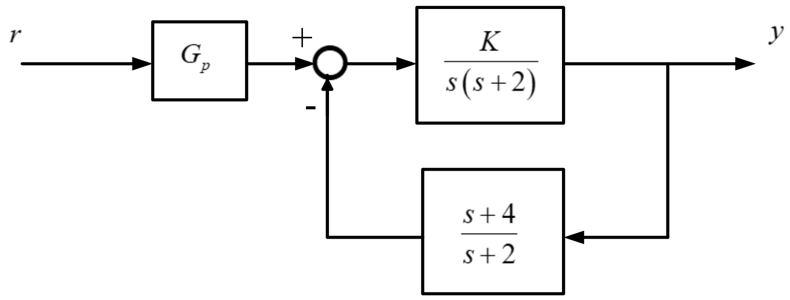
1. 考慮一迴授控制系統如下圖所示，

(a)當 $K = 0.4$ **、** $G_p = 1$ **且輸入** ***R*(s)為單位步階訊號(unit step)時，求解系統的穩態誤差(**$e = r - y$**)；**

(b)設計 G_p **使系統單位步階響應的穩態誤差為零。**



Sol.

(a) 考慮誤差為 $E(s) = \left[1 - T(s)\right]R(s)$

當輸入為 $R(s) = \dfrac{1}{s}$ 及 $G_p = 1$ 時，由終值定理可知穩態誤差為

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left[1 - T(s)\right]R(s) = \lim_{s\to 0} s\left[1 - T(s)\right]\frac{1}{s} = 1 - T(0)$$

其中系統的閉迴路轉移函數為

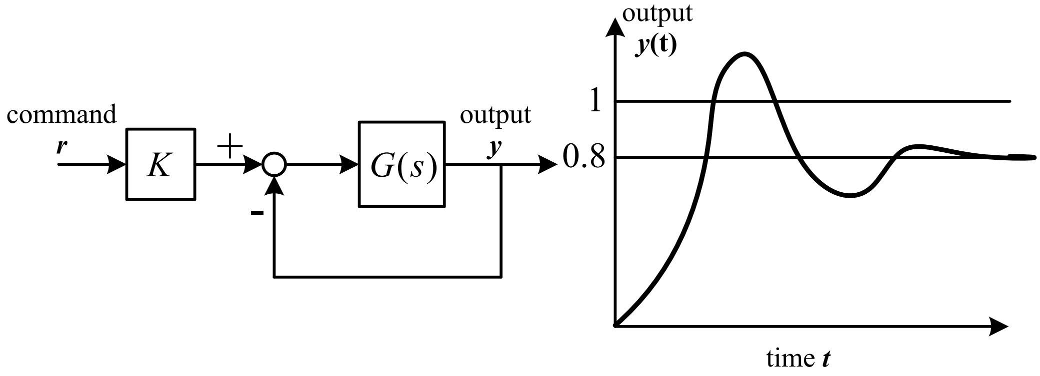
$$T(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+2)(s+2) + K(s+4)} \Rightarrow T(0) = 0.5$$

因此 $e_{ss} = 1 - T(0) = 0.5$

(b) 若系統單位步階響應的穩態誤差為零，即 $e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left[1 - G_p T(s)\right]R(s) = 0$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left[1 - G_p T(s)\right] = 1 - G_p T(0) = 1 - 0.5G_p = 0 \Rightarrow G_p(s) = 2$$

2. 考慮一迴授控制系統如圖(a)所示，當 *K*=1 時之單位步階響應如圖(b)，其輸出穩態值為 0.8。試求解 *K* 值使系統為零穩態誤差($e=r-y$)。



(a) (b)

Sol.

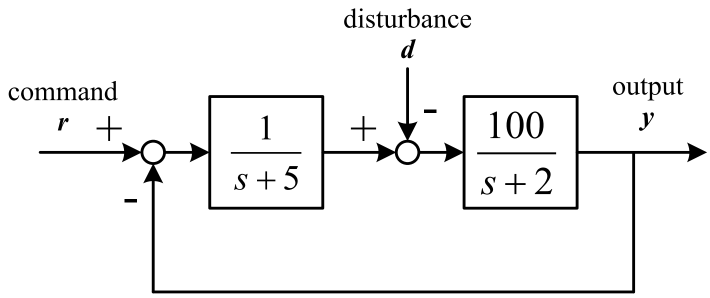
系統的輸出為$Y(s)=T(s)R(s)=K\dfrac{G(s)}{1+G(s)}R(s)$，

當$K=1$，輸出穩態值為 0.8，即$\lim\limits_{s\to 0}s\dfrac{G(s)}{1+G(s)}\times\dfrac{1}{s}=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{G(s)}{1+G(s)}=\dfrac{G(0)}{1+G(0)}=0.8$.

若欲使系統為零穩態誤差，即$\lim\limits_{s\to 0}s\dfrac{KG(s)}{1+G(s)}\times\dfrac{1}{s}=K\times\dfrac{G(0)}{1+G(0)}=1$，即$0.8K=1$

因此$K=1.25$

3. 考慮下圖所示之控制系統，當輸入命令 u 及外擾 d 皆為單位步階，試求解系統之穩態誤差($e=r-y$)。



Ans:

由重疊定理可求得系統輸出響應為

$$Y(s)=\frac{\dfrac{100}{(s+2)(s+5)}}{1+\dfrac{100}{(s+2)(s+5)}}\times R(s)-\frac{\dfrac{100}{(s+2)}}{1+\dfrac{100}{(s+2)(s+5)}}\times D(s)$$

$$=\frac{100}{s^2+7s+110}\times R(s)-\frac{100(s+5)}{s^2+7s+110}\times D(s)$$

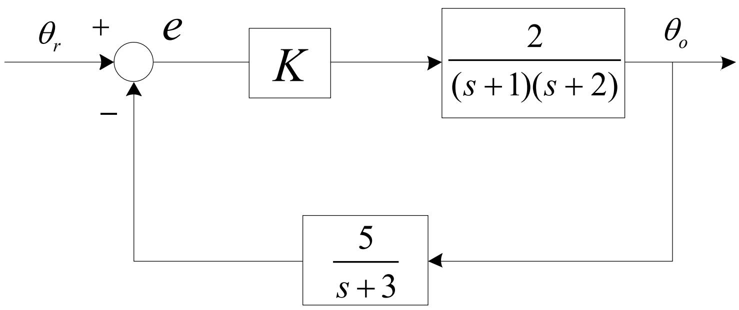
定義誤差訊號為

$$E(s)=R(s)-Y(s)$$
$$=R(s)-\frac{100}{s^2+7s+110}\times R(s)+\frac{100(s+5)}{s^2+7s+110}\times D(s)$$
$$=\frac{s^2+7s+10}{s^2+7s+110}\times R(s)+\frac{100(s+5)}{s^2+7s+110}\times D(s)$$

當 R(s)與 D(s)均為單位步階函數時，利用終值定理即可求得整個系統的穩態誤差為

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\frac{10}{110}+\frac{500}{110}=\frac{51}{11}$$

4. 考慮下圖所示的控制系統，若 $\theta_r(t)=0.1\ \forall\, t>0$ ，當穩態誤差 $e(t)$ 須小於 0.02 時，試求解增益控制器 *K* 的大小範圍。



Solution: 由圖可知 $\theta_0=\dfrac{2K(s+3)}{s^3+6s^2+11s+(6+10K)}\theta_r(s)$

系統之追蹤誤差可表示為

$$E(\mathrm{s})=\theta_r(s)-\frac{5}{s+3}\theta_o(s)=\theta_r(s)-\frac{10K}{s^3+6s^2+11s+(6+10K)}\theta_r(s)$$
$$=\frac{s^3+6s^2+11s+6}{s^3+6s^2+11s+(6+10K)}\theta_r(s)$$

當 $\theta_r(t)=0.1$ 時，可得 $E(\mathrm{s})=\dfrac{s^3+6s^2+11s+6}{s^3+6s^2+11s+(6+10K)}.\dfrac{0.1}{s}$

利用終值定裡可得 $e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(\mathrm{s})=\dfrac{0.6}{6+10K}$

根據題目要求 $e(\infty)$ 必須小於 0.02，即

$$e_{ss}=\left|\frac{0.6}{6+10K}\right|<0.02\ \Rightarrow K<-3.6\text{，}K>2.4$$

此外，系統亦需維持穩定，根據閉迴路特性方程式 $s^3+6s^2+11s+(6+10K)=0$ ，利用羅斯表法則求出系統穩定之 K 值範圍:

s^3	1	11
s^2	6	$6+10K$
s	$\dfrac{30-5K}{3}$	
s^0	$6+10K$	

若閉迴路是穩定，則$30-5K>0$，$6+10K>0 \Rightarrow -0.6<K<6$
取交集可得 K 的範圍: 2.4<K<6。

5. 考慮二階閉迴路系統$\dfrac{Y(s)}{R(s)}=\dfrac{K(s+\alpha)}{s^2+4s+8}$，若輸入為單位斜坡訊號$R(s)=\dfrac{1}{s^2}$，試求解 K 及α使穩態誤差($E(s)=R(s)-Y(s)$)為零。

Sol.

將已知的閉迴路轉移函數改寫為單位迴授控制系統

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K(s+\alpha)}{s^2+4s+8}=\frac{K(s+\alpha)}{\left[s^2+4s+8-K(s+\alpha)\right]+K(s+\alpha)}\overset{\Delta}{=}\frac{G(\mathrm{s})}{1+G(s)}$$

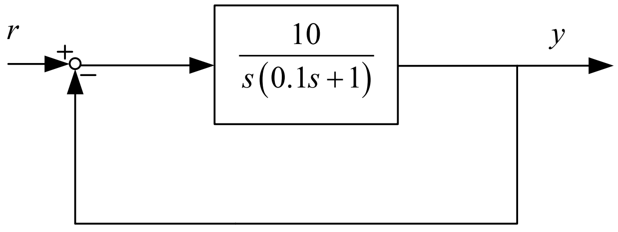
其中$G(s)=\dfrac{K(s+\alpha)}{s^2+4s+8-K(s+\alpha)}$

若欲滿足單位斜坡輸入零穩態誤差，則速度誤差常數須為$K_v=\infty$、即$e_{ss}=\dfrac{1}{K_v}=0$，

因此$K_v=\lim\limits_{s\to 0}sG(s)=\lim\limits_{s\to 0}s\times\dfrac{K(s+\alpha)}{s^2+(4-K)s+(8-K\alpha)}=\infty$

由此可推得$G(s)$必須為 type 2 以上，可得即$4-K=0,\ 8-K\alpha=0$
因此$K=4,\ \alpha=2$。

6. 考慮下圖之迴授控制系統，若輸入為$r(t)=1+2t$，試求解系統的穩態誤差($e=r-y$)。



Sol.

由系統控制方塊圖可得知閉迴路系統為穩定，令$r(t)=1+2t$為同時包含步階及斜坡訊

號，因此可藉由位置及速度誤差常數，求解系統的穩態誤差

位置誤差常數 $K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \dfrac{10}{s(0.1s+1)} = \infty$

速度誤差常數 $K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s \times \dfrac{10}{s(0.1s+1)} = 10$

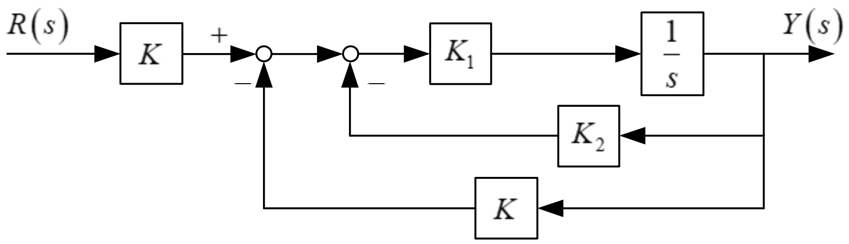
系統的穩態誤差為 $e_{ss} = \dfrac{1}{1+K_p} + \dfrac{2}{K_v} = 0.2$

7. 考慮下圖中的回授控制系統，試求解

(a)輸入 R(s)至輸出 Y(s)間的閉迴路轉移函數；

(b)對 K_1 的靈敏度函數；

(c)單位步階訊號輸入時之穩態誤差($e = r - y$)。



Sol.

(a) 由梅森增益公式，可求得閉迴路轉移函數

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(s) = \frac{\dfrac{KK_1}{s}}{1+\dfrac{K_1K_2}{s}+\dfrac{KK_1}{s}} = \frac{KK_1}{s+K_1K_2+KK_1}$$

(b) K_1 之靈敏度函數

$$S_{K_1}^{T} = \frac{\partial T}{\partial K_1} \times \frac{K_1}{T} = \frac{-(K_2+K)KK_1 + (s+K_1K_2+KK_1)K}{(s+K_1K_2+KK_1)^2} \times \frac{K_1}{\dfrac{K_1K}{s+K_1K_2+KK_1}}$$

$$= \frac{s}{s+K_1K_2+KK_1}$$

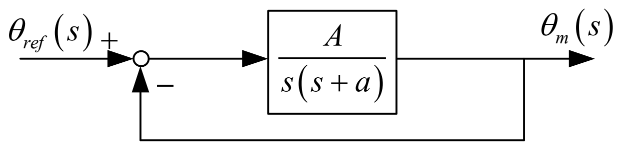
(c)穩態誤差

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left\{\left(1-\frac{KK_1}{s+K_1K_2+KK_1}\right)\times\frac{1}{s}\right\} = 1-\frac{KK_1}{K_1K_2+KK_1} = \frac{K_1K_2}{K_1K_2+KK_1}$$

8. **考慮下圖之單位回授控制系統，試求解**

(a)閉迴路轉移函數 $\dfrac{\theta_m(s)}{\theta_{ref}(s)}$.

(b)參數 a 和 A，使系統之速度誤差常數及 $K_v = 20$ **及阻尼係數為** $\xi = 0.707$ **.**



Sol.

(a)閉迴路轉移函數 $T(s) = \dfrac{\theta_m(s)}{\theta_{ref}(s)} = \dfrac{A}{s^2 + as + A}$

(b)化為標準二階系統型式 $\dfrac{\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^{\ 2}}$

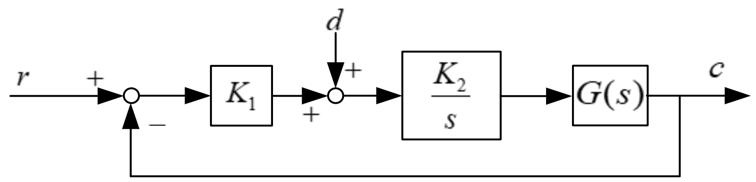
比較係數可知 $a = 2\xi\omega_n = 1.414\omega_n$, $A = \omega_n^{\ 2}$

此外，由速度誤差常數定義可知 $K_v = \lim\limits_{s \to 0} s \dfrac{A}{s(s+a)} = \dfrac{A}{a} = 20$

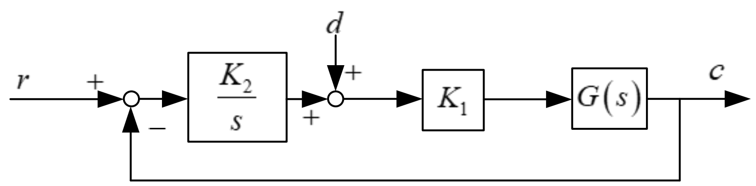
因此，可求解 $a = 40,\ A = 800,\ \omega_n = 28.28$

9. **下列所示為兩組控制系統架構，r 和 c 分別為系統命令輸入和輸出，d 代表系統外擾。對步階型式的外擾針對穩態誤差** $e = (r - c)$ **，試比較何者架構具有較佳的外擾抑制能力。**

note: $G(s) = \dfrac{b}{s+a}$, 且 $a > 0$ & $b > 0$



(a)



(b)

Sol.

令圖(a)中之閉迴路控制系統表示為

$$T_1(s)=\frac{c}{d}=\frac{K_2G(s)}{s+K_1K_2G(s)}$$

可知

$$c_{ss}=\lim_{s\to 0}s\times T_1(s)\times d(s)=\lim_{s\to 0}s\times\frac{K_2G(s)}{s+K_1K_2G(s)}\times\frac{1}{s}=\frac{1}{K_1}$$

對圖(b)中，可得閉迴路控制系統為

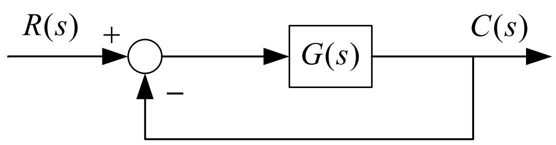
$$T_2(s)=\frac{c}{d}=\frac{sK_1G(s)}{s+K_1K_2G(s)}$$

$$c_{ss}=\lim_{s\to 0}s\times T_2(s)\times d(s)=\lim_{s\to 0}s\times\frac{sK_1G(s)}{s+K_1K_2G(s)}\times\frac{1}{s}=0$$

比較兩者架構之外擾影響，可發現在圖(b)的架構下，外擾在穩態時會收斂為 0。表示，圖(b)架構的抗外擾能力較佳!

10. 考慮下圖之單位回授控制系統，其中開迴路系統轉移函數$G(s)=\frac{25}{s(s+5)}$。若輸入命令為單位步階訊號時，試求解輸出響應的上升時間T_r (10%到 90%)以及最大超越量M_o。

Hint : 上升時間: $t_r=\frac{1.8}{\omega_n}$ ，最大超越量: $M_o=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$



Sol.

由系統方塊圖可得其閉迴路轉移函數$T(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{25}{s^2+5s+25}$(標準二階系統)，其

特性方程式為$\Delta(s)=s^2+5s+25=s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=0$

由比較係數可得ξ=0.5，$\omega_n=5$ rad/sec 。

根據標準二階系統的暫態公式，可得上升時間與最大超越量分別為:

$t_r=\frac{1.8}{\omega_n}$=0.36 sec (from 10% to 90%)　　$M_o=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}=0.163$

11. 考慮一閉迴路受控系統之轉移函數 $G(s)=\dfrac{5000}{s+200}$ ，當輸入 $u(t)=\sin 400t$ ，$\forall\, t\geq 0$ ，

試求該系統輸出的穩態響應。

Sol.

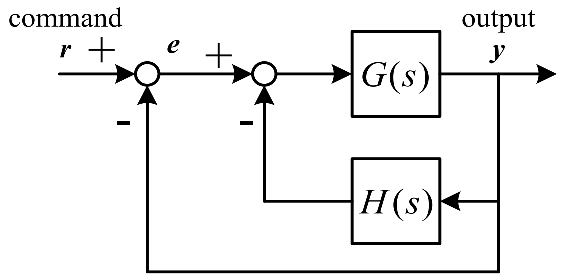
由系統轉移函數可得其頻率響應為 $G(j\omega)=\dfrac{5000}{j\omega+200}$ 。

當頻率 $\omega=400$ ，可知 $G(j400)=\dfrac{5000}{j400+200}$ ，其增益值與相位值分別為：

$$\left|G(j400)\right|=11.18 \qquad \angle G(j400)=-63.43^{\circ}$$

因此系統的輸出穩態響應為 $11.18\sin(400t-63.43^{\circ})$

12. 考慮一控制系統如下圖所示，其中 $G(s)=\dfrac{a}{s(s+1)}$ 、$H(s)=\dfrac{10s}{a}$ 。當輸入 $r=(100t+23)u(t)$ ，其中 $u(t)$ 為單位步階函數，試求解 a 值使系統的穩態誤差為 0.1。



Sol.

由 e 至 y 之等效開迴路轉移函數如下：

$$\frac{y}{e}=G^{*}(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{\dfrac{a}{s(s+1)}}{1+\dfrac{a}{s(s+1)}\cdot\dfrac{10s}{a}}=\frac{a}{s(s+11)}$$

由 r 至 y 之閉迴路轉移函數為 $\dfrac{y}{r}=\dfrac{G^{*}(s)}{1+G^{*}(s)}=\dfrac{a}{s^{2}+11s+a}$

透過終值定理求得穩態誤差為:

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}s(r-y)=\lim_{s\to 0}sr(1-\frac{y}{r})=\lim_{s\to 0}s(\frac{s(s+11)}{s^{2}+11s+a})(\frac{23}{s}+\frac{100}{s^{2}})=0+\frac{1100}{a}=0.1$$

解得 $a=11000$ 。

當 $a=11000$ 時，特性方程式為 $\Delta(s)=1+G^*(s)=s^2+11s+11000=0$ ，此時之閉迴路系統是穩定的，因此 $a=11000$ 可同時滿足穩定度與穩態誤差為 0.1。