

1. 請以羅斯表(Routh-criterion) 判斷下列系統是否穩定？

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 2}$$

Ans:

羅斯表

s^3	1	1	
s^2	2	2	$A(s) = 2s^2 + 2$
s	0	0	$dA(s)/ds = 4s$
s	4		
s^0	2		

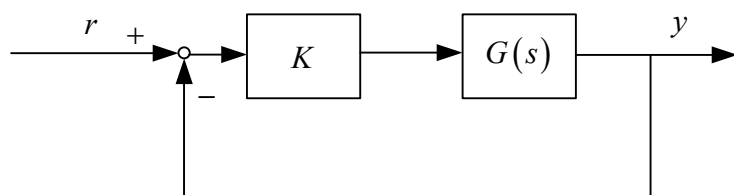
檢查羅斯表第一行元素沒有正負變號，但因 s 列為 0，由 $A(s)=0$ ，求解可得 $s = \pm j$ ，表示特性方程式有兩個純虛根，所以該系統屬於臨界穩定。

2. 考慮一單位回授控制系統如下圖所示，其中受控系統的轉移函數為

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)(s + 3)}$$

，當控制器為增益 K，試求 K 值的範圍，能使閉迴路為穩定。

定。



Ans:

閉迴路轉移函數為

$$\frac{y}{r} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{K}{s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 3s + K}$$

由特性方程式 $s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 3s + K = 0$ 可得一羅斯表如下:

s^4	1	4	K
s^3	4	3	
s^2	3.25	K	
s	$\frac{9.75 - 4K}{3.25}$		
s^0	K		

若閉迴路系統為穩定，其閉迴路極點均須落在 s 左半平面，即羅斯表第一行元素必須

其全部為正(沒有正負變號), 所以可得 $\frac{9.75-4K}{3.25} > 0, K > 0 \Rightarrow 0 < K < 2.4375$

3. 考慮單輸入單輸出系統 $y'''(t) + y''(t) + 6y'(t) + (k-3)y(t) = u(t)$, 試求使得系統穩定的 k 值範圍

Sol.

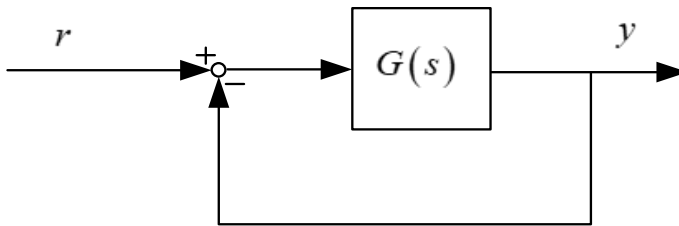
對系統的微分方程式取拉式轉換, 並令初值為零, 可得系統的轉移函數為

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + s^2 + 6s + k - 3}, \text{ 其羅斯表為}$$

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s \\ s^0 \end{array} \begin{array}{cc} 1 & 6 \\ 1 & k-3 \\ 9-k & \\ k-3 & \end{array}$$

符合穩定條件之 k 值必須滿足 $9-k > 0$ 與 $k-3 > 0$, 可得 k 值範圍為 $3 < k < 9$

4. 考慮一單位閉迴路系統之 $G(s) = \frac{1}{s(1+0.5s)(1+s)}$, 試求解其增益邊限(Gain margin)。



Ans:

令 $G(s) = \frac{K}{s(1+0.5s)(1+s)}$, 由 $\frac{G}{1+G}$ 閉迴路系統可得特性方程式為:

$$s^3 + 3s^2 + 2s + 2K = 0$$

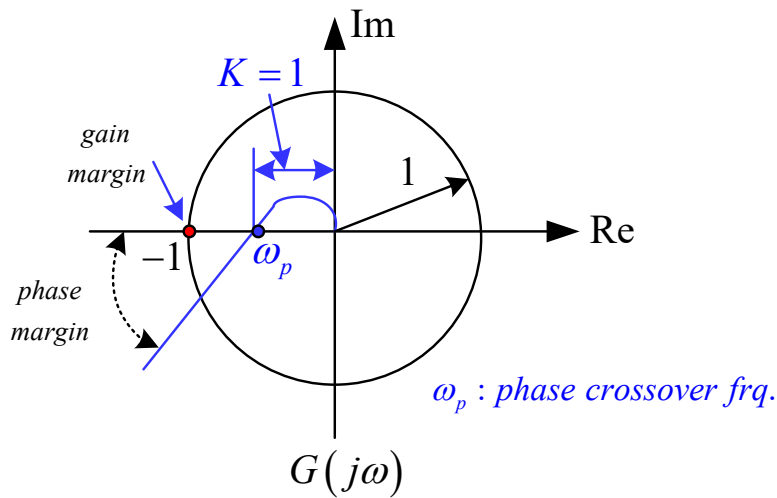
利用羅斯表判斷閉迴路穩定的 K 值範圍如下:

s^3	1	2
s^2	3	2K
s	$\frac{6-2K}{3}$	
s^0	2K	

滿足閉迴路穩定的 K 值範圍是 $0 < K < 3$ 。

因 $K=1$ ，所以該系統是穩定的。

另由極座標圖可知：



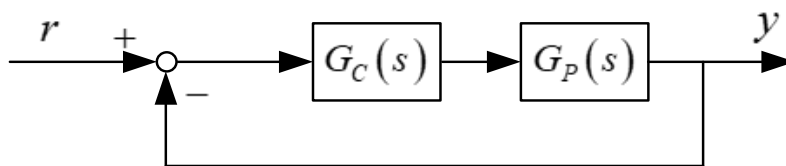
根據 Gain Margin 物理定義：系統到達臨界穩定前增益(gain)還有多少變化的餘度 (以 dB 為單位)。

故可求得 $G.M. = 20 \log 3 = 9.54 \text{ dB}$

5. 考慮一閉迴路系統如圖所示，其中 $G_P(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 - 1}$ 以及 $G_C(s) = \frac{K}{s}$ 。

(a) 試求能夠使系統穩定之 K 值範圍。

(b) 於臨界穩定時，試求系統的振盪頻率(包含單位)



Sol.

(a) 系統的特徵方程式為 $\Delta(s) = 1 + G_C(s)G_P(s) = s^3 + Ks^2 + (2K-1)s + K$ ，使用羅斯表可得

$$\begin{array}{r} s^3 \quad 1 \quad 2K-1 \\ s^2 \quad K \quad K \\ s^1 \quad \frac{2K^2-2K}{K} \\ s^0 \quad K \end{array}$$

為使系統穩定， K 值必須滿足以下條件：

$$\begin{cases} K > 0 \\ 2K^2 - 2K > 0 \end{cases}$$

因此由上式可知當 $K > 1$ 時，系統會穩定。

(b) 當 $K = 1$ 時，可得特徵方程式為 $\Delta(s) = s^3 + s^2 + s + 1 = (s+1)(s^2 + 1)$

此時系統有極點為於 $\pm j$ ，因此振盪頻率為 1 rad/sec 。

6. 考慮一回授系統之特徵方程式為 $s^3 + (1+K)s^2 + 10s + (5+15K) = 0$ ，其中 $K > 0$ ，請使用羅斯表求得

- (a) 系統開始不穩定(臨界穩定)時的 K 值。
- (b) 系統臨界穩定時的振盪頻率。

Sol.

(a) 特性方程式 $\Delta(s) = s^3 + (1+K)s^2 + 10s + (5+15K) = 0$

從羅斯表可知

$$\begin{array}{r} s^3 \quad 1 \quad 10 \\ s^2 \quad 1+K \quad 5+15K \\ s \quad \frac{5-5K}{1+K} \end{array}$$

使系統穩定之 K 值條件為： $1+K > 0$ 及 $5-5K > 0$ ，再從題目得 $K > 0$

因此當 $1 > K > 0$ 時系統穩定。當 $K = 1$ 時，系統將變成不穩定(臨界穩定)。

(b) 當 $K = 1$ 時，可知輔助方程式 $A(s) = (1+K)s^2 + (5+15K) = 2s^2 + 20 = 0$

得知 $s = \pm j\sqrt{10}$ ，所以振盪頻率為 $\sqrt{10} \text{ rad/sec}$

7. 考慮一單位迴授控制系統之開迴路轉移函數 $G(s) = \frac{s-1}{(s+4)(s-5)}$ ，試求解控制器

$C(s)$ 使得閉迴路系統為 $G_f(s) = \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} = \frac{1}{s+5}$ ，並說明此閉迴路系統是否為漸

進穩定。

Sol.

$$G_f(s) = \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)} = \frac{1}{s+5} = \frac{1}{s+5-1+1} = \frac{1}{1+(s+4)}$$

$$G(s)C(s) = \frac{1}{s+4} = \frac{s-1}{(s+4)(s-5)} \times C(s)$$

$$C(s) = \frac{s-5}{s-1}$$

因為右半平面極零點對消，故系統為不穩定。

8. 請以羅斯表(Routh-criterion) 判斷下列系統是否穩定？

$$G(s) = \frac{1}{3s^5 + 5s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$$

Ans:

羅斯表

s^5	3	6	2
s^4	5	3	1
s^3	4.2	1.4	
s^2	1.33	1	
s	-1.75		
s^0	1		

由於羅斯表第一行數字正負變號 2 次，該特性方程式有兩個根落在 s 右半平面，所以系統屬於不穩定。