1. **考慮一系統之轉移函數為:**

$$G(s)=\frac{4s^2+25s+38}{s^3+9s^2+26s+24}$$

令系統之狀態空間表示式為:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & b\end{bmatrix}x+Bu \quad ,\ x(0)=0$$ **，試求** a , b , B

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}x$$

ANS:

已知 A 矩陣為對角矩陣，須採用並聯分解法。

先將 $G(s)$ 因式分解為:

$$\mathrm{G}(s)=\frac{4s^2+25s+38}{s^3+9s^2+26s+24}=\frac{2}{s+2}+\frac{1}{s+3}+\frac{1}{s+4}$$

根據題意，第一個狀態必須選擇其對應的特徵值–2，因此遵循並聯分解的步驟，可得下列兩種可能的答案:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}u\ ,\ y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}x$$

或

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}u\ ,\ y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}x$$

因此得 $a = \text{-}3,\ b = \text{-}4$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，或 $a = \text{-}4,\ b = \text{-}3$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. **考慮一系統之轉移函數為:**

$$\mathrm{G}(s) = \frac{s-1}{s\left(s^2+3s+2\right)}$$

請將該系統表示成可控制典型式(Controllable Canonical Form)之狀態空間表示式如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu\ ,\ x(0) = x_0 \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Ans:

$$\frac{Y}{U} = \mathrm{G}(s) = \frac{s-1}{s\left(s^2+3s+2\right)} = \frac{s-1}{s^3+3s^2+2s} \times \frac{X}{X}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y = \left(s-1\right)X \\ U = \left(s^3+3s^2+2s\right)X \end{cases}$$

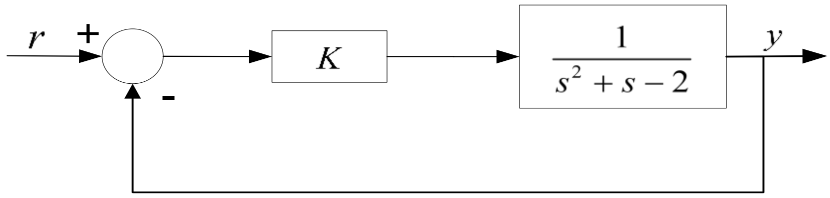
$$\overset{L^{-1}}{\Rightarrow} \begin{cases} y\left(t\right) = \dot{x} - x \\ u\left(t\right) = x^{(3)} + 3\ddot{x} + 2\dot{x} \end{cases}$$

$$Let\ x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = \ddot{x}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_3 - 2x_2 + u\left(t\right) \\ y = x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\ ,\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

3. **考慮單位回授控制系統如下**



若定義 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ **，閉迴路之系統狀態空間式可表示為:**

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + Br\ ,\ x(0) = x_0$$

$$y = C\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

試求:

(a) **可控制典型式(Controllable Canonical Form)狀態空間的 *A*、*B*、*C***

(b)***A* 矩陣之特徵值**

(c) **由(b)之結果，試求 *K* 範圍可保證系統穩定**

(d)**使用羅斯表方法驗證(c)的結果**

ANS:

由閉迴路系統可得，$\dfrac{Y}{R} = \dfrac{K}{s^2 + s - 2 + K}$ ，其微分方成式為:

$$\ddot{y} + \dot{y} + (K-2)y = Kr$$

令狀態變數為 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ ，可得

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = (2-K)x_1 - x_2 + Kr$$
$$y = x_1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2-K & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} r \text{ , } y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

因此 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2-K & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

另 $\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ K-2 & s+1 \end{bmatrix} = s^2 + s + (\mathrm{K} - 2) = 0$

因此特徵值為 $s = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9-4K}}{2}$

若閉迴路控制系統為穩定，則特徵值之實數部分必須落在左半平面，因此可知

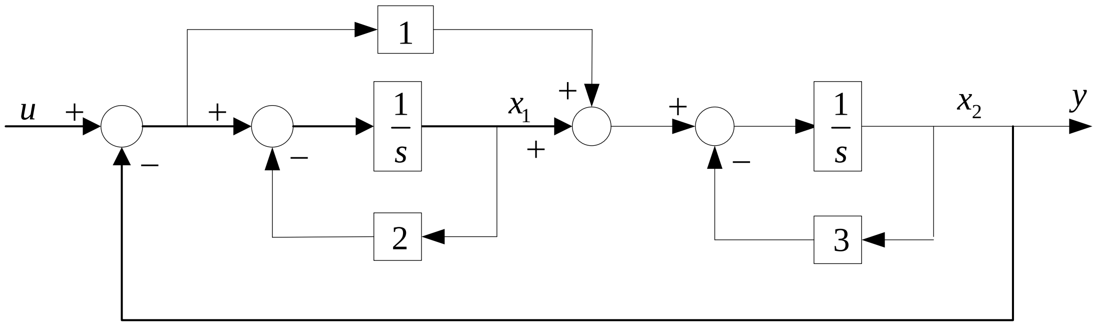
$$\frac{-1 \pm \sqrt{9-4K}}{2} < 0 \Rightarrow K > 2$$

由閉迴路系統的特徵方程式 $s^2 + s + (\mathrm{K} - 2) = 0$，根據羅斯表可得:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & K-2 \\ s^1 & 1 & \\ s^0 & K-2 & \end{array}$$

因此 $K > 2$ 即為穩定

4. **考慮一閉迴路系統方塊圖如下:**



令輸入為u**，輸出為**y**與狀態為**$[x_1 \quad x_2]^T$**，試寫出系統狀態空間表示式，並解釋**u**至**y**之轉移函數系統是否為可觀性(Observerable)?**

Ans:

根據上圖所示的狀態定義可得:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{s}(\mathrm{u} - \mathrm{y} - 2\,\mathrm{x}_1) \\
\mathrm{x}_2 &= \frac{1}{s}(\mathrm{x}_1 + \mathrm{u} - \mathrm{y} - 3\,\mathrm{x}_2) \\
\mathrm{y} &= \mathrm{x}_2
\end{aligned}
$$

整理之後可得:

$$
\begin{cases} sx_1 = u - y - 2x_1 \\ sx_2 = x_1 + u - y - 3x_2 \\ y = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 + u \\ y = x_2 \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u = Ax + Bu \text{ , } x(0) = 0 \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Cx \end{cases}
$$

帶入 $y = Cx = \left[C(sI-A)^{-1}B\right]u$ 可求得轉移函數為:

$$\frac{Y}{U} = G(s) = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s+2 & 1 \\ -1 & s+4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix} = \frac{s+3}{s^2+6s+9}$$

由可觀性矩陣 $Q_O = \begin{bmatrix}C \\ CA\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & -4\end{bmatrix}$ ，得知 $rank(Q_O) = 2$ (階數)，可知系統是可觀察的。

5. **考慮下列狀態空間表示式**

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

其中 $A = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -1 & -2\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}2 \\ 1\end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$

(1) **試檢視系統之可控性(controllability)**

(2) **試檢視系統之可觀性(observability)**

(3) **考慮狀態回授** $u = -Kx$ **，試求回授增益** K **使閉路極點位於** $\frac{-3 \pm j\sqrt{23}}{2}$ 。

ANS:

(1) 控制性矩陣為

$$Q_c = \begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1 \\ 1 & -4\end{bmatrix}$$

rank $Q_c = 2$, 故系統可控制

(2) 觀察性矩陣為

$$Q_o = \begin{bmatrix} C & CA \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

rank $Q_o = 1$, 故系統不可觀察

(3) 閉迴路經過狀態回授設計之後，其特性方程式為

$$\det\left(sI - A + BK\right) = \begin{vmatrix} s+2k_1 & 2k_2 - 1 \\ 1+k_1 & s+2+k_2 \end{vmatrix} = s^2 + (2 + k_2 + 2k_1)s + (5k_1 - 2k_2 + 1)$$

希望的特性方程式為

$$\alpha_c(s) = \left(s + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{2}\right)^2 = s^2 + 3s + 8$$

令 $\det\left(sI - A + BK\right) = \alpha_c(s)$, 比較係數得 $\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$