1.　一控制系統的特徵方程式為

$$1+\frac{K}{s(s+5)(s+40)}=0\text{ ，}$$

試確認 $s=-5+5j$ **是否會落在根軌跡圖上; 如果是，請問** K **值為何?**

Sol:

(方法一)

令開迴路系統 $G(s)=\dfrac{1}{s(s+5)(s+40)}$

若 $s=-5+5j$ 是根軌跡上圖的一點，則代入 $G(s)=-\dfrac{1}{K}$ 後，K 必須為實數。

由

$$\frac{1}{(-5+5j)(-5+5j+5)(-5+5j+40)}=\frac{1}{-125(6+8j)}=-\frac{1}{K}$$

很明顯地，可知上述方程式中的 K 值是無實數解(即系統之增益值變數必須為實數)，因此 $s=-5+5j$ 不會落在此系統的根軌跡上。

(方法二)

另外，亦可從相位關係求證是否落在此系統的根軌跡上。

$$-\angle(-5+5j)-\angle(-5+5j+5)-\angle(-5+5j+40)$$

$$=-(90^\circ+\tan^{-1}\frac{5}{5})-90^\circ-\tan^{-1}\frac{5}{35}$$

$$=-233.13^\circ$$

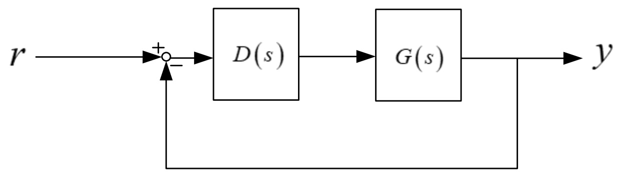
很明顯地，將 $s=-5+5j$ 代入開路轉移函數後，所得的相位值不等於奇數倍 180° 或偶數倍 180°，所以相位關係不滿足，因此 $s=-5+5j$ 不會落在系統的根軌跡上。

注意：若某一點 s_1 位於此系統的根軌跡上，則根據根軌跡原理，將 s_1 代入大小關係可解得 K 值。該值即為 s_1 所對應的系統增益值 K。

2.　一單位閉迴路系統如下圖所示，其中 $D(s)=\dfrac{K(s+2)}{(s+p)}$ **，** $G(s)=\dfrac{1}{s(s+1)}$ **。**

(1)試用根軌跡設計方法找出 K 和 p，讓根軌跡能通過點 $-3\pm j3$ **。**

(2)請從(1)中的根軌跡，另找出其第三個根。



Sol:

(1)利用閉迴路系統的相位關係，將 s=−3+3j 代入可得

$$\angle\frac{s+2}{s+p}\times\frac{1}{s(s+1)}\bigg|_{s=-3+j3}=\angle\frac{-1+j3}{[(p-3)+j3](-3+j3)(-2+j3)}$$

$$=\left(180^\circ-\tan^{-1}\frac{3}{1}\right)-\tan^{-1}\frac{3}{p-3}-\left(180^\circ-\tan^{-1}\frac{3}{3}\right)-\left(180^\circ-\tan^{-1}\frac{3}{2}\right)$$

$$=-180^\circ$$

$$\Rightarrow p=8.25$$

再利用其振幅大小關係，可得

$$\left|\frac{-1+j3}{(5.25+j3)(-3+j3)(-2+j3)}\right|=\frac{1}{K}\ \Rightarrow\ K=29.25$$

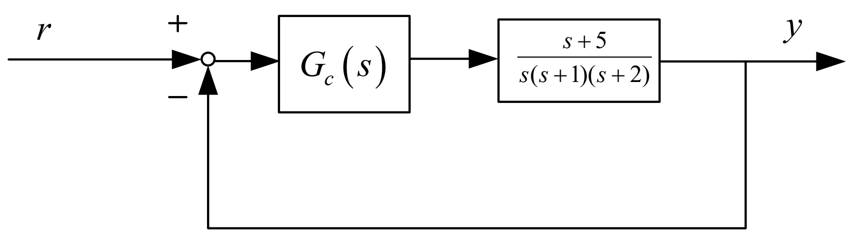
(2)令閉迴路系統之特徵方程式為

$$\Delta(s)=s^3+9.25s^2+37.5s+58.5=(s^2+6s+18)(s+a)$$

利用比較係數法，可得 $a=3.25$ ，

即第三個極點為 $s=-3.25$

3.　給定一閉迴路控制系統如下圖



(1)當補償器為常數 G_c=K ，請劃出此控制系統之根軌跡及其漸進線，並標明與虛軸的交點及其對應之 K 值。

(2)當補償器設為 $G_c(s)=K\frac{s+2}{s+p}$ ，試求 p 值讓點 $A=-1+j4$ 位於根軌跡上。

Sol:

(1)令 $G(s)=\dfrac{s+5}{s(s+1)(s+2)}$

(a) $G(s)$的極點： $s=0,-1,-2,\ n=3$

$G(s)$的零點： $s=-5,\ \mathrm{m}=1$

(b)實軸上的根軌跡：[-5,-2],[-1,0]

(c)漸進線與實軸的交點：$\sigma_A = \dfrac{-3-(-5)}{2} = 1$

漸進線角度：$\theta_A = \dfrac{\pm(2q+1)180°}{2} = \pm 90°$

(d)由分離點須滿足$\dfrac{dG(s)}{ds} = 0$,可解得$s^3 + 9s^2 + 15s + 5 = 0$

$\Rightarrow s = -6.94, -1.61, -0.45$

(e) 根軌跡與虛軸交點:由閉迴路特徵方程式可得:

$s^3 + 3s^2 + (2+K)s + 5K = 0$

羅斯表:

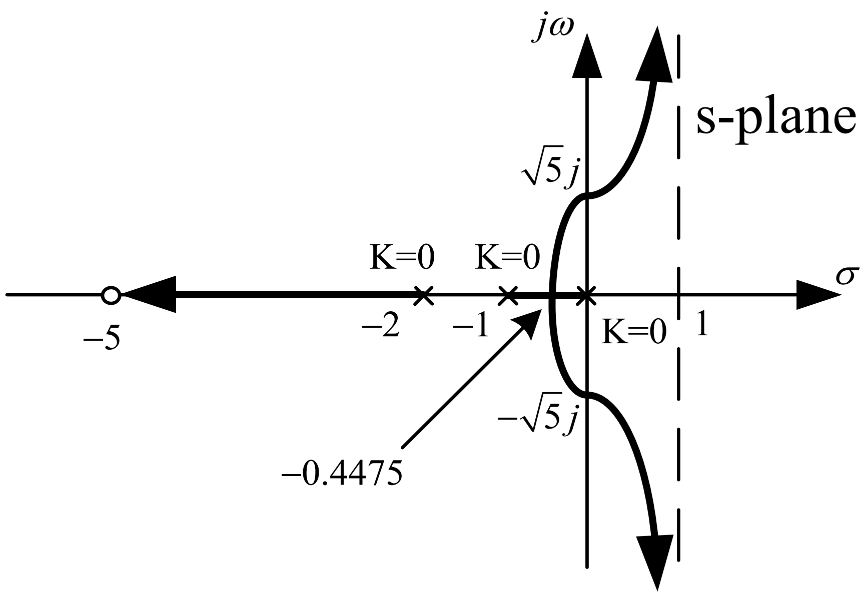
s^3	1	2+K
s^2	3	5K
s	$\dfrac{6-2K}{3}$	
s^0	5K	

當 K=3 時，羅斯表s列之係數將全部為零，利用s^2列輔助方程式

$A(s) = 3s^2 + 15 = 0$，求解可得$s = \pm j\sqrt{5}$。此即為根軌跡與虛軸的交點，且由

$6-2K = 0$可得其交點的$K = 3$。

(f) 根軌跡圖(只劃$K>0$的根軌跡):



若$G_c(s) = K\dfrac{s+2}{s+p}$，則開路轉移函數為$G_c(s)G(s) = \dfrac{K(s+5)}{s(s+1)(s+p)}$。

若要 $A=-1+j4$ 落在根軌跡上，則必須滿足下列相位關係:

$$\angle G_cG(-1+j4)=\angle\frac{4+j4}{(-1+j4)(j4)(-1+p+j4)}$$

$$=45^\circ-104^\circ-90^\circ-\tan^{-1}\frac{4}{p-1}$$

$$=-180^\circ$$

由上式可得 p=7.66

4.　試求特徵方程式 $1+KG(s)=0$ **的根軌跡，其中** $G(s)=\dfrac{1}{s(s+2)}$ **。**

Sol:

(a) $G(s)$ 的極點：$s=0,-2$

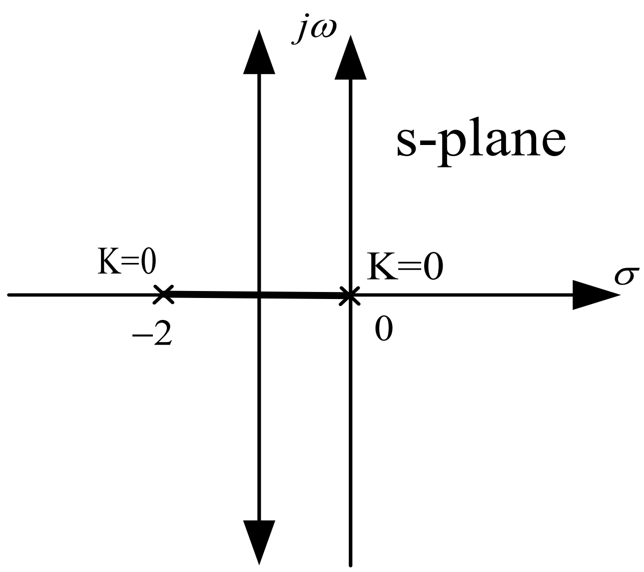
(b)實軸上的根軌跡：[0, -2]

(c)漸進線與實軸的交點：$\sigma_A=\dfrac{-2-(0)}{2}=-1$

漸進線角度：$\theta_A=\dfrac{\pm(2q+1)180^\circ}{2}=\pm 90^\circ$

(d)由分離點須滿足 $\dfrac{dG(s)}{ds}=0$,求解可得 $s=-1$

(e) 根軌跡圖:

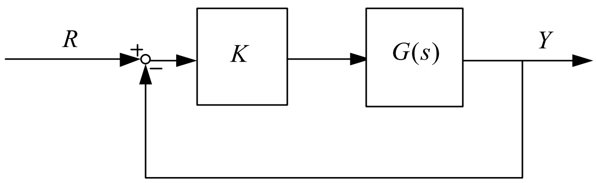


5.　考慮一單位迴授系統之受控系統 $G(s)=\dfrac{s+1}{s^2(s+9)}$ **和增益控制器 *K*，其特徵方**

程式為$s^3+9s^2+Ks+K=0$。當$G(s)$相位於$180°$時，其根軌跡的分離點為$s=-3$。

(1) 試求在分離點$s=-3$之控制器增益K_0。

(2) 令$K=K_0+K_1$，另求根軌跡為K_1，找到分離點之離開角。



Sol:

(1)

(a) 利用系統根的關係，可得

$$\left.\frac{s+1}{s^2(s+9)}\right|_{s=-3}=\frac{1}{K_0}\ \Rightarrow\ K_0=27$$

分離點須滿足$\dfrac{d}{ds}G(s)=0$，即

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s+1}{s^2(s+9)}\right)=0$$

可得之根$s=-3,-3,0$

(2)

令$K_0=27$，由$K=27+K_1$，可得

$$\Delta(s)=s^3+9s^2+(27+K_1)s+(27+K_1)=0$$

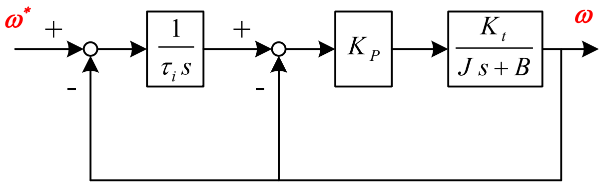
及 $1+K_1\dfrac{s+1}{(s+3)^3}\overset{\Delta}{=}1+K_1G_1(s)=0$

利用$G_1(s)$討論分離點的離開角，將$s=-3,-3,-3$(三重根)視為極點，則由

$$\phi_2=-2\left(180^{\circ}\right)=-360^{\circ}\Rightarrow 3\phi_p=\pm(2g+1)\pi+360^{\circ}$$

可得$\phi_z=\pm60^{\circ},\ 180^{\circ}$

6.　考慮伺服馬達之速度控制是採用 IP 控制器之架構如下圖所示，試以 K_p 為變數繪根軌跡圖，其中 $J=0.1$、$B=0.4$ $K_t=0.5$ 及 $\tau_i=0.1$。



Sol:

$$T(s)=\frac{\omega}{\omega^*}=\frac{\dfrac{K_pK_t}{\tau_i s(Js+B)}}{1+\dfrac{K_pK_t}{Js+B}+\dfrac{K_pK_t}{\tau_i s(Js+B)}}$$

$$=\frac{K_pK_t}{\tau_i s(Js+B)+\tau_i sK_pK_t+K_pK_t}$$

$$=\frac{K_pK_t}{\tau_i Js^2+\tau_i(B+K_pK_t)s+K_pK_t}$$

由$s^2+\dfrac{B}{J}s+\dfrac{K_pK_t}{J}s+\dfrac{K_pK_t}{\tau_i J}=0$

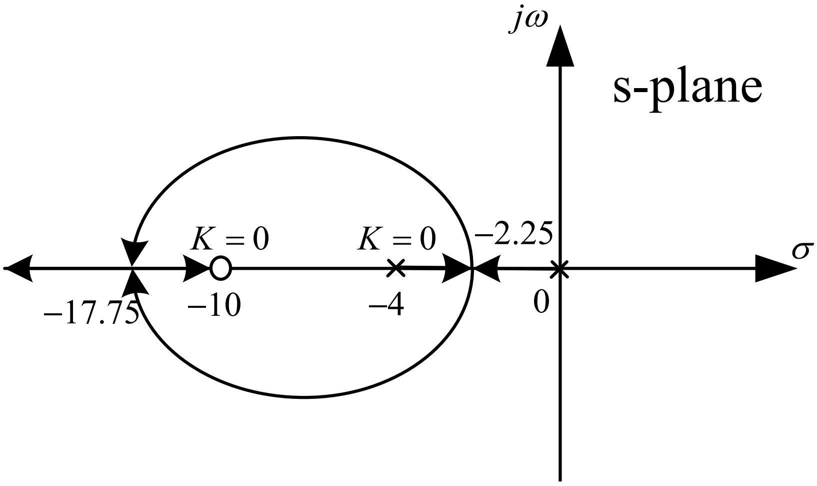
可得

$$1+\frac{\dfrac{K_pK_t}{J}s+\dfrac{K_pK_t}{\tau_i J}}{s^2+\dfrac{B}{J}s}=0$$

$$\Rightarrow 1+K_p\frac{\tau_i K_t s+K_t}{\tau_i Js^2+\tau_i Bs}=0$$

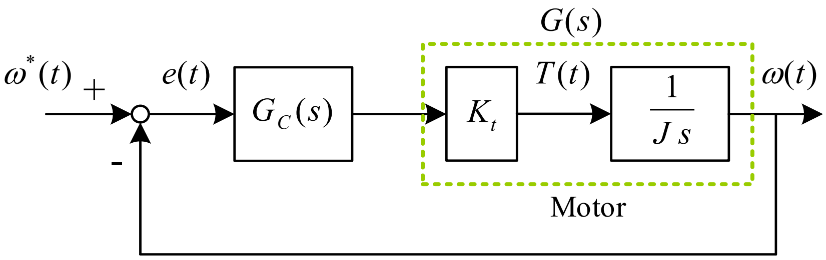
令$L(s)=\dfrac{\tau_i K_t s+K_t}{\tau_i Js^2+\tau_i Bs}=\dfrac{5(s+10)}{(s^2+4s)}$

由分離點: $\dfrac{dL(s)}{ds}=0$ 求解可得 $s^2+20s+40=0$，即 $s=-2.25,\ -17.75$



7.　考慮一馬達速度控制方塊圖如下所示，其中 $J=1$，$K_t=0.5$，

$$G_C(s)=K_p+\frac{K_i}{s}$$ 。



令 $K_p=4$，請劃出系統隨著 K_i 變化的根軌跡圖。

Sol:

由系統特徵方程式: $1+G_c(s)G(s)=1+\dfrac{K_t}{Js}\left(K_p+\dfrac{K_i}{s}\right)=0$

可得　$1+\dfrac{K_t}{Js}\left(K_p+\dfrac{K_i}{s}\right)=0$

$\Rightarrow$　$1+\left(\dfrac{K_tK_p}{Js}+\dfrac{K_tK_i}{Js^2}\right)=0$

即　$Js^2+K_tK_ps+K_tK_i=0$

再由　$1+K_i\dfrac{K_t}{Js^2+K_tK_ps}=0 \;\Rightarrow\; 1+K_iL(s)=0$

可知　$L(s)=\dfrac{K_t}{Js^2+K_tK_ps}=\dfrac{0.5}{s^2+2s}$

Root-locus:

(a) $L(s)$ 的極點：$s=0,-2$

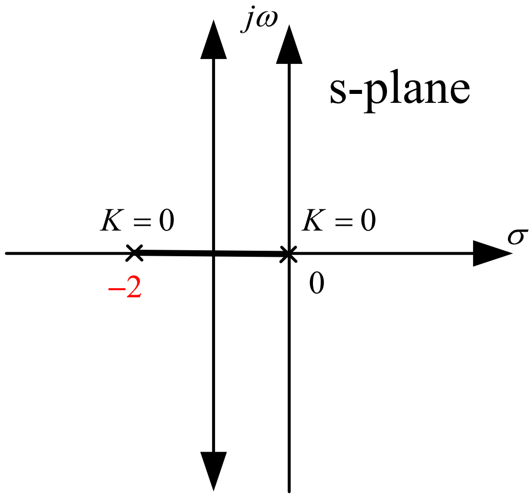
(b)實軸上的根軌跡：[0, -2]

(c)漸進線與實軸的交點：$\sigma_A = \dfrac{(-2)-(0)}{2} = -1$

漸進線角度：$\theta_A = \dfrac{\pm(2q+1)180^\circ}{2} = \pm 90^\circ$

(d)由分離點須滿足 $\dfrac{dG(s)}{ds} = 0$，求解可得 $s=-1$

(e) 根軌跡圖:



8.　考慮一閉迴路控制系統之特徵方程式為 $1+KG(s)=0$，其中

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)\left[(s+1)^2+1\right]}$$ **，試描繪其根軌跡圖。**

Sol:

Step 1.

$G(s)$ 極點: $s=0,-2,-1\pm j$ 、零點: 無以及系統階數: n=4

Step2.

漸近線角度 $\theta_A = \dfrac{\pm(2q+1)\times 180^\circ}{n} = \dfrac{\pm(2q+1)\times 180^\circ}{4} = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ,\ q=0,\ 1$

漸近線與實軸交點 $\sigma_A = \dfrac{-2+(-1+j)+(-1-j)}{4} = -1$

Step3.

根軌跡於極點 $-1\pm j$ 的離開角 θ_P

当 $s=-1+j$， $\theta_P=(2q+1)\times 180^\circ+\angle(s+1-j)G(s)\big|_{s=-1+j}=-90^\circ$, $q=0$