1. 當使用 PID 控制器時，請問比例控制項 K_P，積分控制項 $\frac{K_I}{s}$ 和微分控制項 $K_D s$ 對系統的影響分別為何?

Sol.

(a) K_P：藉由改變控制器的增益項來調整閉迴路系統的相對穩定度及穩態誤差。通常增益變大可降低穩態誤差，但會影響相對穩定度；反之增益變小則增加相對穩定度，但穩態誤差將變大。

(b) $\frac{K_I}{s}$：增加在原點的極點，可消除穩態誤差，是有利於高頻雜訊的抑制；但加入積分控制項易造成系統的不穩定，其暫態響應通常會變得較差，如最大超越量、起升時間等。

(c) $K_D s$：微分控制項可改善系統的阻尼及暫態響應，可增加相對穩定度．但易受高頻雜訊影響，且無法改善穩態誤差。

2. 已知一補償器之轉移函數為 $C(s)=\dfrac{1.45s+0.35}{s+0.07}$，

(1)求此補償器之直流增益值(DC gain)。

(2)求此補償器之高頻增益值(high-frequency gain)。

(3)試問補償器為相位領先(phase-lead)或是相位落後(phase-lag)？為什麼？

Sol.

(1) $\lim\limits_{s\to 0} C(s)=\dfrac{0.35}{0.07}=5\ (13.98dB)$

(2) $\lim\limits_{S\to \infty} C(s)=1.45\ (3.23dB)$

(3) a. 高頻增益值小於直流增益值。

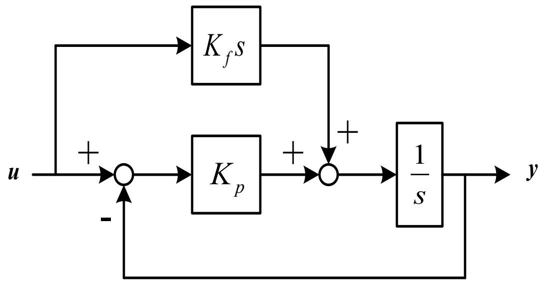
b. $\angle C(j\omega)=\tan^{-1}4.14\omega-\tan^{-1}14.28\omega<0$, $\forall\ \omega>0 \Rightarrow \angle C(j\omega)<0$

c. $C(s)=\dfrac{1.45s+0.35}{s+0.07}=\dfrac{(0.35)}{(0.07)}\dfrac{(1+4.143s)}{(1+14.286s)}=K\dfrac{1+Ts}{1+\beta Ts}$，$\beta>1$

綜合以上三點，可知此補償器為相位落後補償器。

3. 考慮一控制系統架構如下圖，其中 $K_f s$ 為前饋控制器(Feed forward controller)，試求解 (1)當 $K_f=0$ 時，此控制系統之轉移函數 $\frac{Y}{U}=T(s)$ (2)當 $K_f\neq 0$ 時，求其轉移函數 $\frac{Y}{U}=T(s)$ (3)若輸入為斜坡函數 $u(t)=Ft$，其中 F

為進給率(mm/min)，試求穩態誤差為何？



Sol.

(1) $K_f = 0 \Rightarrow \dfrac{Y}{U} = T(s) = \dfrac{\dfrac{K_p}{s}}{1+\dfrac{K_p}{s}} = \dfrac{K_p}{s+K_p}$

(2) $K_f \neq 0 \Rightarrow Y = \dfrac{K_p}{s+K_p}U + U \times K_f \times s \times \dfrac{\dfrac{1}{s}}{1+\dfrac{K_p}{s}}$

$= (\dfrac{K_p}{s+K_p} + \dfrac{K_f s}{s+K_p})U = (\dfrac{K_p + K_f s}{s+K_p})U$

(3) 利用終值定理，由 $e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s)$ & $u = \dfrac{F}{60s^2}$ ，可得

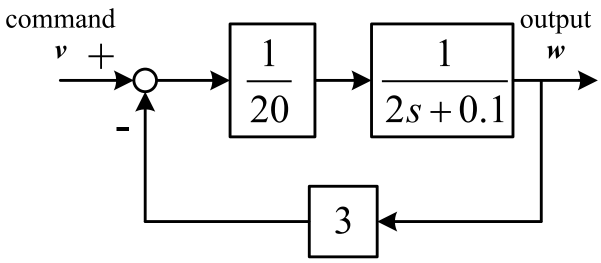
$E(s) = \left(1 - \dfrac{K_f s + K_p}{s+K_p}\right) \cdot \dfrac{F}{60s^2}$ ，因此 $e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \dfrac{\left(1-K_f\right)F}{60K_p}$

4. 考慮一控制系統架構如下圖(a)所示:

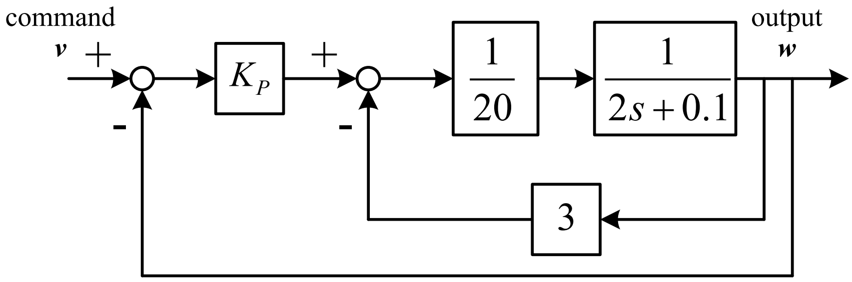
(a)試求系統從輸入 v 到輸出 w 間之 DC gain 及其時間常數 τ 各為何?並請分別解釋 DC gain 及時間常數之物理意義為何?

(b)若於圖(a)中新增一外層控制迴路，如圖(b)所示，試設計比例控制器 K_P，使閉迴路控制系統之穩態時間為 0.5 秒。

note:將四倍的時間常數視為系統達到穩態時間



圖(a)



圖(b)

Sol.

(a)

$$\frac{w}{v}=T(s)=\frac{\frac{1}{20}\times\frac{1}{2s+0.1}}{1+\frac{1}{20}\times\frac{3}{2s+0.1}}=\frac{1}{40s+5}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{8s+1}$$

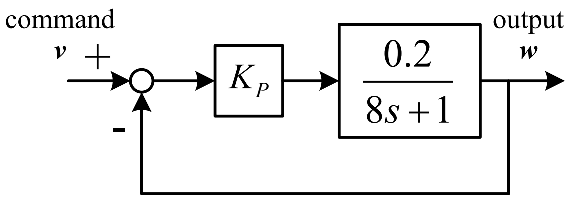
由 $T(0)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{8\times 0+1}=\frac{1}{5}$ ，可知

$dc\ gain=\frac{1}{5}=0.2$ & $\tau=8$ (sec)

DC gain：為系統對單位步階之穩態響應值(steady-state)

時間常數：為系統對單位步階輸入時，達到穩態值 0.632 時所對應的時間。

(b)



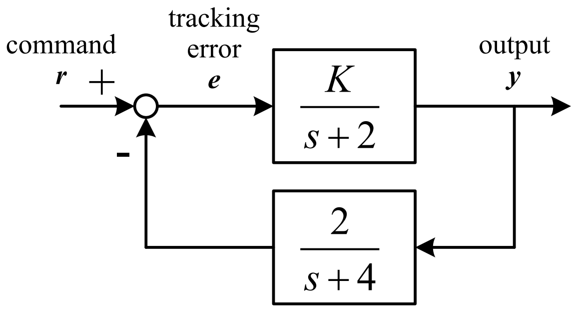
$$\frac{v}{w}=T(s)=\frac{\frac{Kp}{5(8s+1)}}{1+\frac{Kp}{5(8s+1)}}=\frac{Kp}{40s+(5+K_p)}=\left(\frac{Kp}{5+K_p}\right)\left(\frac{1}{\left(\frac{40}{5+K_p}\right)s+1}\right)$$

由 $T(0)=\frac{K_p}{5+K_p}$ 及 $\left(\frac{40}{5+K_p}\right)$s+1=0 ，可得

$dc\ gain = \dfrac{K_p}{5+K_p}$ & $\tau = \dfrac{40}{5+Kp}$

$4\tau = 0.5 \Rightarrow \tau = 0.125 \Rightarrow K_p = 315$，因此由$0.125 = \dfrac{40}{5+Kp}$，可得$K_p = 315$

5. 考慮一控制系統如下圖，試求解增益 K 值，使步階響應輸入時之穩態誤差(e)為 0。



Sol.

由系統方塊圖可得到誤差為$e=\left[1-T(s)\right]r$，其中

$$\frac{y}{r} = T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{K(s+4)}{(s+2)(s+4)+2K}$$

由終值定理，可知步階輸入時之穩態誤差為

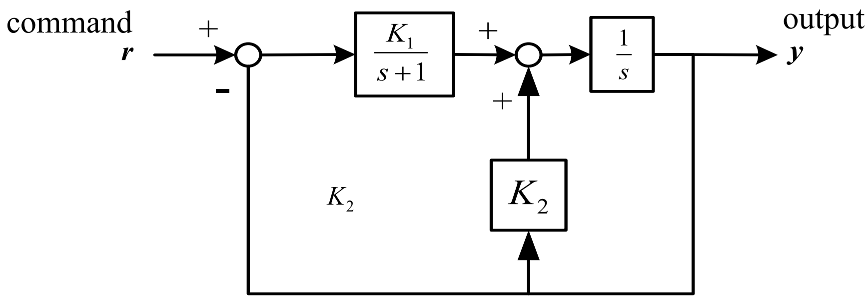
$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\left[1-T(s)\right]R(s) = \lim_{s\to 0} s\left[1-T(s)\right]\frac{1}{s} = 1-T(0) = 1-\frac{4K}{8+2K}$$

$\Rightarrow$ K=4

6. 考慮一控制系統如下圖所示，試求

(a)輸入 r 與輸出 y 間之轉移函數 $T(s)$；

(b)控制器增益值 K_1 及 K_2，使閉迴路系統為臨界阻尼(critical damped)且具有 s=-10 之重根



Sol.

(a)可求得閉迴路系統轉移函數

$$\frac{y}{r}=T(s)=\frac{K_1}{s^2+\left(1-K_2\right)s+(K_1-K_2)}$$

(b)若閉迴路系統為臨界阻尼且具有 s=-10 之重根，即特性方程式可表示為，可知

$$(s+10)^2=s^2+20s+100=s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=0$$

其中 $\xi=1\ \&\ \omega_n=10$

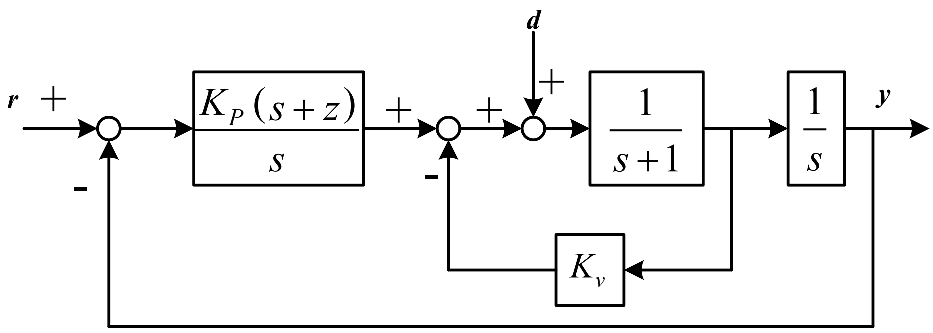
解方程式 $\Rightarrow K_1=81\ \&\ K_2=-19$

7. 考慮一控制系統如下圖所示，其中 *r* 和 *y* 分別為系統的輸入命令及輸出，*d* 則為外擾輸入，試求

(a) 輸入 *r* 至輸出 *y* 之間的閉迴路轉移函數 T(s)；

(b) 求控制器參數 *K_v*、*K_p* 和 z，使得閉迴系統 T(s)極點為 $-10\pm10j$ and -10；

(c) 當外擾輸入分別單位步階及單位斜陂下，其輸出之穩態響應為何。



Sol.

(a) 藉由梅森增益公式，可得輸入至輸出間之閉迴路轉移函數為,

$$\frac{y}{r}=T(s)=\frac{K_P\frac{s+z}{s}\times\frac{1}{s+1}\times\frac{1}{s}}{1+\frac{K_v}{s+1}+K_P\frac{s+z}{s}\times\frac{1}{s+1}\times\frac{1}{s}}=\frac{K_P(s+z)}{s^2(s+1+K_v)+K_P(s+z)}$$

$$=\frac{K_P s+K_P z}{s^3+(1+K_v)s^2+K_P s+K_P z}$$

(b) 由題目可知，欲設計閉迴系統極點為 $-10\pm10j$ and -10，其中閉迴路系統之特性方程式為

$$\Delta(s)=(s^2+20s+200)(s+10)=s^3+30s+400s+2000=s^3+(1+K_v)s^2+K_P s+K_P z$$

由比較係數，可知 $K_v=29, K_p=400, z=5$

(c)外擾輸入至輸出間之轉移函數為

$$\frac{y}{d}=\frac{s}{s^3+(K_v+1)s^2+K_P s+K_P z}$$

當外擾輸入為單位步階時 $D(s)=\frac{1}{s}$，輸出穩態響應為

$$\lim_{s\to0} sY(s)=\lim_{s\to0} sT(s)D(s)=\lim_{s\to0} s\times\frac{s}{s^3+(K_v+1)s^2+K_P s+K_P z}\times\frac{1}{s}=0$$

當外擾輸入為單位斜陂時，輸出穩態響應為：

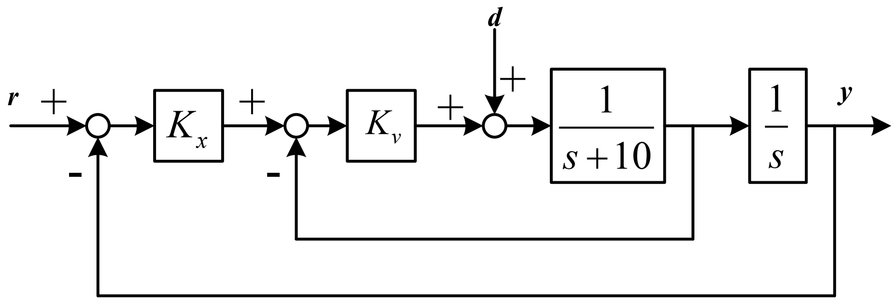
$$D(s)=\frac{1}{s^2},\lim_{s\to0} sY(s)=\lim_{s\to0} s\times\frac{s}{s^3+(K_v+1)s^2+K_P s+K_P z}\times\frac{1}{s^2}=\frac{1}{K_P z}=\frac{1}{400\times5}$$

8. 下圖所示的控制系統，令 *r* 和 *w* 分別為系統的輸入命令及輸出，*d* 則為外擾輸入，試求解：

(a) 外擾 $d=0$ 時，輸入命令至輸出間的轉移函數，及系統維持穩定所需之控制器參數 K_x 及 K_v 範圍；

(b) 求控制器參數 K_x 及 K_v，能使閉迴路系統之阻尼係數為 $\xi=1.25$、自然頻率 $\omega_n=10$；

(c) 單位步階外擾輸入時，其穩態之輸出響應。



Sol. 由圖可知:

(1) 閉迴路轉移函數

$$\frac{y}{r}=H(s)=\frac{K_x\times\dfrac{K_v}{(s+10+K_v)}\times\dfrac{1}{s}}{1+K_x\times\dfrac{K_v}{(s+10+K_v)}\times\dfrac{1}{s}}=\frac{K_xK_v}{s^2+(10+K_v)s+K_xK_v}$$

閉迴路特性方程式

$$\Delta(s)=s^2+(10+K_v)s+K_xK_v=0$$

若閉迴路穩定，則$10+K_v>0$，$K_xK_v>0$，所以$K_x>0$且$K_v>0$
以及$K_x<0$且$0>K_v>-10$系統穩定

(2) $\Delta(s)=s^2+(10+K_v)s+K_xK_v=s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2=s^2+2\times1.25\times10s+10^2$

由比較係數，可知$10+K_v=25$ & $K_vK_x=100$
因此可得$K_v=15$，$K_x=6.67$

(3) 由圖中可得，外擾輸入至輸出間的轉移函數

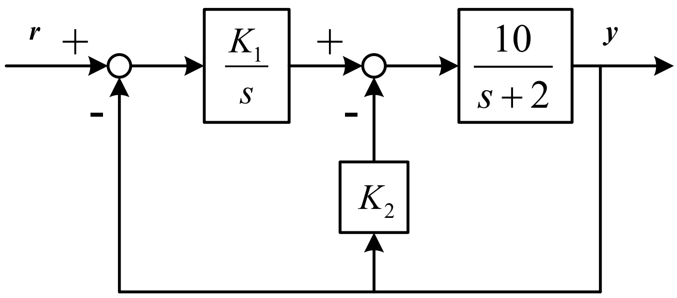
$$\frac{y}{d}=T(s)=\frac{1}{s^2+(10+K_v)s+K_vK_x}$$

利用終值定理$\lim\limits_{s\to0}sT(s)D(s)=\lim\limits_{s\to0}s\times\dfrac{1}{s^2+(10+K_v)s+K_vK_x}\times\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{K_vK_x}$

當$K_v=15$、$K_x=6.67$時，則$y(\infty)=0.01$

9. 考慮一控制系統如下圖所示，試設計控制器參數 K_1 與 K_2，使單位步階輸入之輸出響應之尖峰值時間T_p為 5.236 秒，而安定時間T_s為 5 秒。

Hint: 尖峰時間: $T_p=\dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$，安定時間: $T_s\cong\dfrac{4}{\xi\omega_n}$



Sol.

由系統方塊圖可得閉迴路轉移函數:

$$\frac{Y}{R}=\frac{10K_1}{s^2+\left(2+10K_2\right)s+10K_1}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

為一標準二階系統型式

若輸出尖峰值時間設為 5.236 秒，且安定時間為 5 秒，根據暫態響應公式：

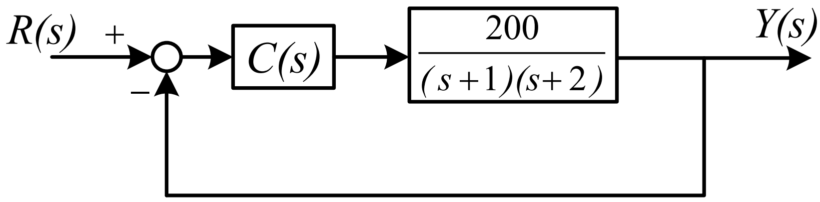
$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 5.236 \text{ ，} T_s \cong \frac{4}{\xi\omega_n} = 5$$

可求得 $\xi = 0.8$ ，$\omega_n = 1$ 。

比較閉迴路特性方程式 $\Delta(s) = s^2 + \left(2+10K_2\right)s + 10K_1 = s^2 + (2\times 0.8\times 1)s + 1^2$

由比較係數，可得 $K_1 = 0.1$ & $K_2 = -0.04$

10. 考慮一控制系統如下圖所示，當 C(s)為 PI 控制器 $C(\mathrm{s}) = \frac{s+0.1}{\mathrm{s}}$ ，當輸入分別為單位步階及單位斜陂命令時，試求系統之穩態追蹤誤差。



Sol.

位置誤差常數:

$$K_p = \lim_{s\to 0}\frac{s+0.1}{\mathrm{s}}\frac{200}{(\mathrm{s}+1)(\mathrm{s}+2)} = \infty$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\frac{s+0.1}{\mathrm{s}}\frac{200}{(\mathrm{s}+1)(\mathrm{s}+2)} = 10$$

單位步階與單位斜坡所造成的穩態誤差分別為:

$$e_{ss}(\mathrm{step}) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+K_p} = 0$$

$$e_{ss}(\mathrm{ramp}) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{K_v} = 0.1$$